سلسلة مذكرات

الإبداع

في الرياضيات

الصف الاول الثانوي

الفصل الدراسي الأول

إعداد/

أ/ جميل غالي السيد

مكتبة وســــــــــم
شربين ـ شارع حسني مبارك ـ خلف الثانوية بنات
01004423597_3943035

مقدمة

كلمة الطموح تعني إبداع العقل ووصوله إلى مدارك الفهم والذكاء ،،

وكلمة **الإبداع** تعني العيش على القمة وإستنشاق عزة العالى لإنه يرجو دائما المعالى لا يقنع بغيره ولا يرضى إلا القمة المستحقة عن جدارة ،،،،،،

فأرجو من الله أن أكون قدمت ما على من خلال هذا العمل المتواضع بين أيديكم

والله أدعوا أن يوفقكم إلى ما تأملونه أنتم ووالديكم

مع أرق الأمنيات بالنجاح والتميز ،،،

أ/ جميل غالى السيد

❖ كيف نذاكر مادة الرياضيات :

- نحفظ قوانين الدرس جيدا " بالورقة والقلم "
- نذاكر الأمثلة المحلولة جيدا " بالورقة والقلم "
- نعيد حل الأمثلة المحلولة مرة أخرى دون النظر إلى الإجابة
- نقوم بحل تمارين متنوعة على الدرس

الإبداع

في الرياضيات

أولا:

الجبر

الوحدة الأولي

الجبر والعلاقات والدوال

١) حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد

٢) مقدمة عن الأعداد المركبة

٣) تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية

٤) العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها

٥) تكوين المعادلة التربيعية من علم جذراها

٦) إشارة الدالة

٧) متباينة الدرجة الثانية في مجهول واحد

تمارين عامة علي الوحدة

اختبار تراكمي

(1) "حل معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد"

نعلم أن :

* المعادلة $أس^2 + ب س + ج = 0$ حيث أ ، ب ، ج $\in$ ح ، أ $\neq 0$. هي معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد هو س . وهذه المعادلة لها حلان "جذران" على الأكثر.

* جذرا المعادلة "مجموعة حل المعادلة" هو كل عدد حقيقي يحققها .

أولاً : حل معادلة الدرجة الثانية جبرياً :.

(1) باستخدام التحليل (2) باستخدام القانون العام

مثال ① :- أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :-

(1) $س^2 - 5س = 0$ (4) $3س^2 - 17س - 6 = 0$

(2) $س^2 - 5س - 6 = 0$ (5) $س^2 - 9 = 0$

(3) $س^2 - 6س + 9 = 0$ (6) $5س^2 + 2س - 4 = 0$

(7) $س + \frac{5}{س} = 4$

الحل :-

(2) $س^2 - 5س - 6 = 0 \Leftarrow (س - 6)(س + 1) = 0$

إما $س - 6 = 0$ | أو $س + 1 = 0$

$س = 6$ | $س = -1$

$\therefore$ م.ح = {6 ، -1}

(1) $س^2 - 5س = 0 \Leftarrow س(س - 5) = 0$

$س = 0$ | $س = 5$

م.ح = {0 ، 5}

(3) $س^2 - 6س + 9 = 0 \Leftarrow (س - 3)(س - 3) = 0 \Leftarrow (س - 3)^2 = 0$

$\Leftarrow س - 3 = 0 \Leftarrow س = 3$ $\therefore$ م.ح = {3}

(٤) $3\text{س}^2 - 17\text{س} - 6 = 0$ "تحلل بالمقص"

٣س ، ١ ، س ، ٦ (+ ، −) — (س) ، (١٨س)

$(3\text{س} + 1)(\text{س} - 6) = 0$

إما $3\text{س} + 1 = 0 \Leftarrow 3\text{س} = -1$ ، $\text{س} = -\frac{1}{3}$ | أو $\text{س} - 6 = 0 \Leftarrow \text{س} = 6$

∴ م.ح = $\{-\frac{1}{3} ، 6\}$

(٥) $\text{س}^2 - 9 = 0$ "فرق بين مربعين"

$(\text{س} - 3)(\text{س} + 3) = 0 \Leftarrow \text{س} = 3$ أو $\text{س} = -3$

∴ م.ح = $\{3 ، -3\}$

(٦) $5\text{س}^2 + 2\text{س} - 4 = 0$ "تحلل بالقانون العام"

$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{جـ}}}{2\text{أ}}$ حيث أ معامل س² ، ب معامل س ، جـ الحد المطلق

لابد أن تكون المعادلة في الصورة $\text{أ}\text{س}^2 + \text{ب}\text{س} + \text{جـ} = 0$

أ = ٥ ، ب = ٢ ، جـ = −٤ ، $\sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

$\therefore \text{س} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 5 \times -4}}{2 \times 5} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 80}}{10} = \frac{-2 \pm \sqrt{84}}{10}$

$\text{س} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{21}}{10} = \frac{2(-1 \pm \sqrt{21})}{10} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{5}$

∴ م.ح = $\{\frac{-1 + \sqrt{21}}{5} ، \frac{-1 - \sqrt{21}}{5}\}$.

---

(٧) $\text{س} + \frac{5}{\text{س}} = 4$ ×س $\Leftarrow \text{س}^2 + 5 = 4\text{س} \Leftarrow \text{س}^2 - 4\text{س} + 5 = 0$

أ = ١ ، ب = −٤ ، جـ = ٥

$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{جـ}}}{2\text{أ}} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$

$\text{س} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$ ∵ $\sqrt{-4} \notin$ ح ∴ لا يوجد حل للمعادلة في ح

∴ م.ح = $\emptyset$

* تدريب * أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :-

(١) $س^{2} + ٣س = ٠$

(٢) $س^{2} - ٤س + ٣ = ٠$

(٣) $س^{2} + ٤س + ٤ = ٠$

(٤) $٥س^{2} - ١٤س + ٨ = ٠$

(٥) $س^{2} - ١ = ٠$

(٦) $س^{2} + ٢س - ٥ = ٠$

مثال ② :- أطلقت قذيفة رأسيًا لأعلى بسرعة ع تساوي ١٩,٦ م/ث . احسب الفترة الزمنية ن بالثانية التي تستغرقها حتى تصل إلى ارتفاع ف مترًا حيث ف تساوي ١٤,٧ م علمًا بأن العلاقة بين ف ، ع ، ن هي $ف = ع ن - ٤,٩ ن^{2}$

الحل :-

∵ $ف = ع ن - ٤,٩ ن^{2}$ ، ف = ١٤,٧ م ، ع = ١٩,٦ م/ث

⇐ $١٤,٧ = ١٩,٦ ن - ٤,٩ ن^{2}$ (÷ ٤,٩) ⇐ $٣ = ٤ن - ن^{2}$

⇐ $ن^{2} - ٤ن + ٣ = ٠$ ⇐ $(ن - ٣)(ن - ١) = ٠$

ن = ٣ | ن = ١

أي أن :- القذيفة تصل إلى ارتفاع ١٤,٧ م بعد ١ ث ثم تستمر في الحركة لأعلى حتى تصل إلى أقصى ارتفاع ثم تتحرك لأسفل وتعود لنفس الارتفاع بعد ٣ ث .

ثانيًا : حل معادلة الدرجة الثانية بيانيًا :-

لحل المعادلة $أس^{2} + ب س + جـ = ٠$ بيانيًا نرسم منحنى الدالة $د(س) = أس^{2} + ب س + جـ$ ثم نعين مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنى مع محور السينات فتكون هي مجموعة الحل .

⊛ وتوجد ثلاث حالات :-

(1) المنحنى يقطع محور السينات في نقطتين

يوجد حلان للمعادلة في ح

∴ م.ح = {ل ، م} ⊂ ح

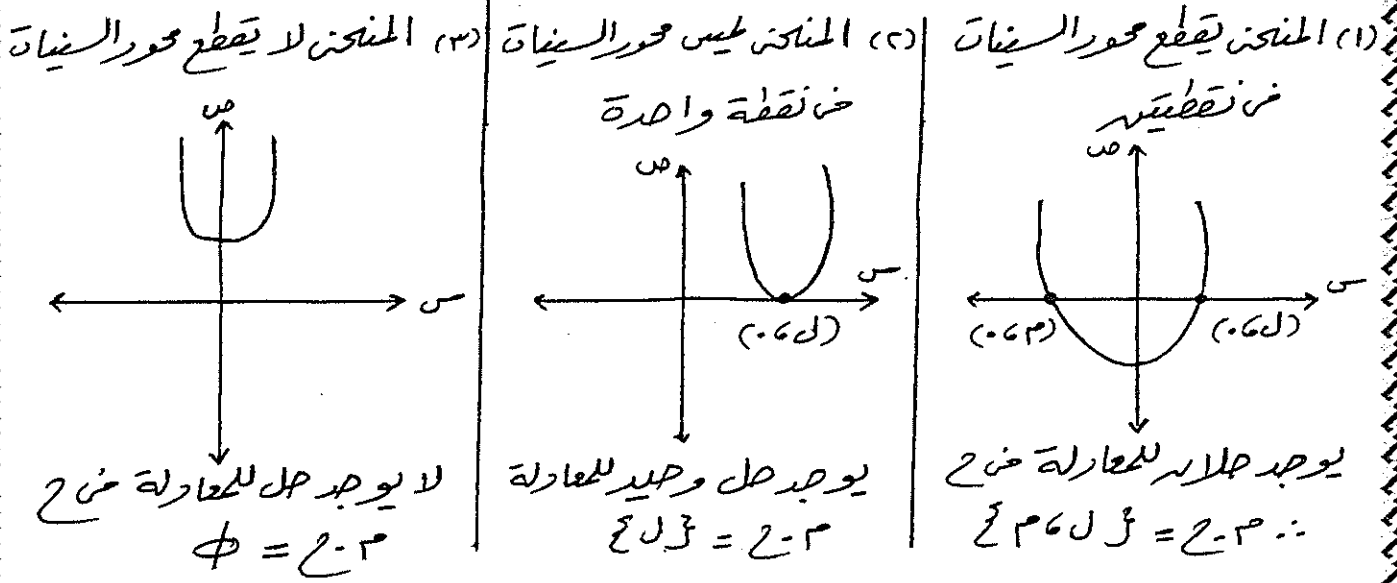
(2) المنحنى يمس محور السينات في نقطة واحدة

يوجد حل وحيد للمعادلة

م.ح = {ل} ⊂ ح

(3) المنحنى لا يقطع محور السينات

لا يوجد حل للمعادلة في ح

م.ح = ∅

مثال ③ :- حل المعادلة س² + 2س − 3 = 0 بيانياً في الفترة [−4 ، 2] ثم تحقق من صحة الحل جبرياً.

الحل :- نرسم منحنى الدالة د(س) = س² + 2س − 3

س	−4	−3	−2	−1	0	1	2
د(س)	5	0	−3	−4	−3	0	5

ومن الرسم نجد أن م.ح = {1 ، −3} ⊂ ح

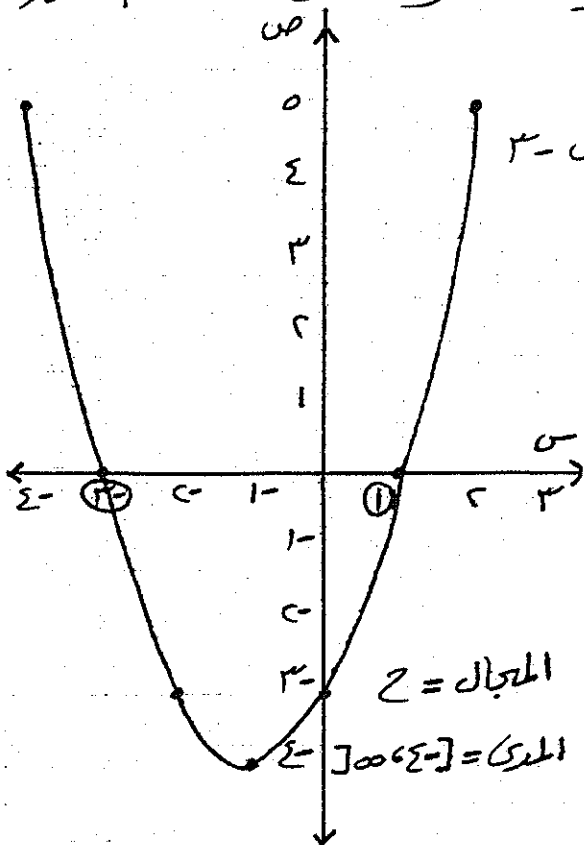
المجال = ح

المدى = [−4 ، ∞[

⇐ التحقق من صحة الحل جبرياً :-

س² + 2س − 3 = 0 ⇐ (س − 1)(س + 3) = 0

س = 1 | س = −3

∴ م.ح = {1 ، −3} ⊂ ح

⊛ ويمكن التحقق من صحة الحل أيضاً بالتعويض بمجموعة الحل في المعادلة فنجد أنها تحققها.

"ملحوظة هامة" :- في حالة عدم إعطائك فترة للتمثيل يمكننا الحل بإيجاد نقطة رأس المنحنى وهي $\left(\frac{-ب}{2أ}، د\left(\frac{-ب}{2أ}\right)\right)$ ثم نوجد عدة نقاط على يمينها وليسارها

تمارين على "حل معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد"

[1] اختر الإجابة الصحيحة :-

① المعادلة (س - 1)(س + 2) = 0 من الدرجة ..... [الأولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة]

② جذرا المعادلة $2س^2 - 5س - 3 = 0$ هما ..... [$2، \frac{1}{2}$ ، $-2، 1$ ، $3، -\frac{1}{2}$ ، $-3، \frac{1}{2}$]

③ مجموعة حل المعادلة $س^2 + 3 = 0$ في ح هي ..... [{-3} ، {$-\sqrt{3}$} ، {$\sqrt{3}$} ، ϕ]

④ إذا كان س = 3 جذراً للمعادلة $س^2 + م س = 3$ فإن م = ... [-1 ، -2 ، 2 ، 1]

⑤ مجموعة حل المعادلة $س^2 = س$ هي ..... [{0} ، {1} ، {-1 ، 1} ، {0 ، 1}]

⑥ إذا قطع منحنى الدالة التربيعية محور السينات في نقطتين فإن عدد حلول المعادلة هو ..... [صفر ، 1 ، 2 ، عدد لا نهائي]

---

[2] أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :-

(1) $س^2 - 5س + 6 = 0$ (3) $(س - 4)^2 = 0$ (5) س(س + 1)(س - 1) = 0

(2) $س^2 + 3س = 0$ (4) $س^2 + 9 = 0$ (6) $س^2 - 2س + 1 = 0$

[3] حل كل من المعادلات الآتية في ح باستخدام القانون العام :-

(1) $س^2 - 6س + 7 = 0$ (3) $س^2 + 6س + 8 = 0$ (5) $5س^2 - 3س - 1 = 0$

(2) $2س^2 + 3س - 4 = 0$ (4) $3س^2 - 65 = 0$ (6) $3س^2 - 6س - 4 = 0$

[4] أوجد مجموعة حل المعادلة $س^2 - 2س - 4 = 0$ بيانياً في الفترة [-2 ، 4]

[5] أوجد قيمة كل من أ ، ب إذا كان 5 ، -3 هما جذرا المعادلة $س^2 + أ س + ب = 0$

(٢) " مقدمة عن الأعداد المركبة "

تمهيد :. سبق أن درسنا نظام الأعداد الصحيحة (ص) ونظام الأعداد الطبيعية (ط) ونظام الأعداد النسبية (ن) ونظام الأعداد الحقيقية (ح)

وعلمنا أن أي نظام نشأ كتوسيع للنظام الذي يسبقه لحل معادلات جديدة لم تكن قابلة للحل في النظام السابق.

مثلاً المعادلة س٢ + ١ = ٠ ⟸ س٢ = -١ (ليس لها حل في ح)

لذا كان التفكير في نظام جديد للأعداد يمكن حل هذا النوع من المعادلات ويكون توسيع لنظام الاعداد الحقيقية (ح) .

العدد التخيلي (ت) :.

لحل المعادلة السابقة سنفرض عدداً ∉ ح يحقق المعادلة س٢ = -١ ونرمز لهذا العدد بالرمز (ت) أي أن " العدد التخيلي ت هو العدد الذي مربعه = -١ "

وبالتالي ت٢ = -١

وعلى هذا فإنه يمكن حل المعادلة س٢ = -١ كالتالي :.

∵ س٢ = -١ ⟸ س٢ = ت٢ ⟸ س = ±$\sqrt{ت^2}$ = ± ت

∴ م.ح = {ت ، -ت} ، ت٢ = -١ حيث ت ∉ ح

وبذلك توجد مجموعة جديدة من الأعداد تسمى مجموعة الأعداد التخيلية .

مثال ① أوجد مجموعة حل المعادلة س٢ + ١٦ = ٠

∵ س٢ + ١٦ = ٠ ⟸ س٢ = -١٦ ⟸ س٢ = ١٦ × -١ ⟸ س٢ = ١٦ ت٢

∴ س = ± $\sqrt{١٦ ت^2}$ = ± ٤ ت

∴ م.ح = {٤ت ، -٤ت}

* قوى ت الصحيحة :-

$\because$ $ت^2 = -1$ $\Leftarrow$ $ت^3 = ت^2 \times ت = -1 \times ت = -ت$

$\Leftarrow$ $ت^4 = ت^2 \times ت^2 = -1 \times -1 = 1$

$\Leftarrow$ $ت^5 = ت^4 \times ت = 1 \times ت = ت$

$\Leftarrow$ $ت^6 = ت^4 \times ت^2 = 1 \times -1 = -1$ وهكذا ....

نلاحظ أن :-

* القوى الصحيحة للعدد ت تعطي إحدى القيم ت ، -1 ، -ت ، 1

* قيم ت تتكرر بصفة دورية كلما زاد الاس بمقدار 4

" بوجه عام " :-

$ت^{4ن} = 1$ ، $ت^{4ن+1} = ت$ ، $ت^{4ن+2} = -1$ ، $ت^{4ن+3} = -ت$

مثال ② :- اكتب في أبسط صورة :-

$ت^7$ ، $ت^8$ ، $ت^{13}$ ، $ت^{42}$ ، $ت^{-5}$ ، $ت^{-19}$ ، $ت^{4ن+5}$

الحل :-

* $ت^7 = ت^{4\times1+3} = ت^3 = -ت$

* $ت^8 = ت^{4\times2+0} = ت^0 = 1$

* $ت^{13} = ت^{4\times3+1} = ت^1 = ت$.

* $ت^{42} = ت^{4\times10+2} = ت^2 = -1$

* $ت^{-5} = \frac{1}{ت^5} = \frac{1}{ت^{4\times1+1}} = \frac{1}{ت}$ (بالضرب $\times \frac{ت}{ت}$) $\Leftarrow \frac{1}{ت} \times \frac{ت}{ت} = \frac{ت}{ت^2} = \frac{ت}{-1} = -ت$

* $ت^{-19} = \frac{1}{ت^{19}} = \frac{1}{ت^{4\times4+3}} = \frac{1}{ت^3} = \frac{1}{-ت} \times \frac{ت}{ت} = \frac{ت}{-ت^2} = \frac{ت}{-(-1)} = ت$

* $ت^{4ن+5} = ت^5 = ت^4 \times ت = 1 \times ت = ت$.

* خلاصة الكلام * لإيجاد $ت^{ن}$ حيث $ن \in ص$ نقسم ن على ٤ فيكون $ت^{ن}$ = أحدى القيم كما بالجدول .

باقي القسمة	٠	١	٢	٣
القيمة	١	ت	-١	-ت

* تدريب * اكتب في أبسط صورة :-

* * $ت^{٩}$ ، $ت^{١٠}$ ، $ت^{١٩}$ ، $ت^{٤٨}$ ، $ت^{-١٠}$ ، $ت^{-٤}$ ، $ت^{٤ن+١١}$

العدد المركب :-

لإيجاد حل المعادلة $س^{٢} - ٨س + ٢٥ = ٠$ بالقانون العام نجد أن :-

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أج}}{٢أ} = \frac{٨ \pm \sqrt{٦٤ - ٤ \times ١ \times ٢٥}}{٢ \times ١} = \frac{٨ \pm \sqrt{-٣٦}}{٢} = \frac{٨ \pm \sqrt{٣٦ ت^{٢}}}{٢}$$

$$س = \frac{٨ \pm ٦ت}{٢} = \frac{٢(٤ \pm ٣ت)}{٢} = ٤ \pm ٣ت$$

أي أن :- المعادلة لها جذران هما ٤+٣ت ، ٤-٣ت ولكنهما لا ينتميان إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ⇐ يسمى كل من ٤+٣ت ، ٤-٣ت "عدداً مركباً"

أي أن :- العدد المركب هو العدد الذي يمكن وضعه على الصورة **ع = أ + ب ت**

ويسمى أ بالجزء الحقيقي ، ب بالجزء التخيلي .

أمثلة لأعداد مركبة :- ٢-ت ، ٧+٢ت ، ٥ت-٤ ، $\sqrt{٢} + \sqrt{٥}$ت ، -٤ت

"ملاحظات" :-

(١) إذا كان ع = أ + ب ت وكان ب = ٠ فإن ع = أ ويكون ع "حقيقياً صرف" .

(٢) إذا كان ع = أ + ب ت وكان أ = ٠ فإن ع = ب ت ويكون ع "تخيلياً صرف" .

(٣) أي عدد حقيقي هو عدد مركب جزءه التخيلي = صفر .

(٤) أي عدد تخيلي هو عدد مركب جزءه الحقيقي = صفر .

تساوي عددين مركبين :-

يتساوى العددين المركبين إذا وفقط إذا تساوى الجزءان الحقيقيان وتساوى الجزءان التخيليان .

أي أنه :- إذا كان أ + ب ت = جـ + د ت فإن أ = جـ ، ب = د

الجزء الحقيقي = الجزء الحقيقي ، الجزء التخيلي = الجزء التخيلي "والعكس صحيح"

← "خاصية" إذا كان أ + ب ت = ٠ ⇐ أ = صفر ، ب = صفر (مهمة)

مثال ③ :- أوجد قيمتي س ، ص إذا كان :-

(١) س - ٣ص + (٢س + ص) ت = ٦ + ٥ت

(٢) س + ت ص + ٤ - ٥ت = ٠

الحل :-

(١) ∵ العددان المركبان متساويان ⇐ الحقيقي = الحقيقي ، التخيلي = التخيلي

⇐ س - ٣ص = ٦   س - ٣ص = ٦

، ٢س + ص = ٥ (×٣) ⇐ ٦س + ٣ص = ١٥

٧س = ٢١ ⇐ (÷٧) **س = ٣**

بالتعويض في المعادلة الأولى عن س = ٣ ⇐ ٣ - ٣ص = ٦ ⇐ -٣ص = ٣

⇐ (÷-٣) **ص = -١**

(٢) ∵ العدد المركب = صفر ⇐ الحقيقي = صفر ، التخيلي = صفر

⇐ س + ت ص + ٤ - ٥ت = ٠ ⇐ (س + ٤) + (ص - ٥) ت = صفر

∴ س + ٤ = ٠ ⇐ **س = ٤** ، ص - ٥ = ٠ ⇐ **ص = ٥**

---

* تدريب * أوجد قيمتي س ، ص إذا كان :-

(١) (٤س - ص) + (٢س + ص) ت = ٥ + ٧ت

(٢) ٢س + ت ص + ٦ - ٥ت + ت س = ٠

العمليات على الأعداد المركبة :-

- يمكن استخدام خواص الإبدال والدمج والتوزيع عند جمع أو ضرب الأعداد المركبة .
- عند جمع أو طرح عددين مركبين نجمع أو نطرح الجزأين الحقيقيين معاً والجزأين التخيليين معاً .

مثال ④ :- أوجد ناتج ما يأتي في أبسط صورة :-

(١) (٣ + ٧ت) + (٥ - ٩ت)

(٢) (٢ - ٤ت) - (٥ - ت)

(٣) (٤ + ٣ت)(٢ - ٥ت)

(٤) (٣ + ٢ت)^٢

(٥) (٤ + ٣ت)(٤ - ٣ت)

(٦) (١ - ت)^٤

(٧) (١ - ت)^٨

الحل :-

(١) (٣ + ٧ت) + (٥ - ٩ت) = ٨ - ٢ت

(٢) (٢ - ٤ت) - (٥ - ت) = -٣ - ٣ت

(٣) (٤ + ٣ت)(٢ - ٥ت) = ٨ + ٦ت - ٢٠ت - ١٥ت^٢ ∵ ت^٢ = -١

= ٨ - ١٤ت + ١٥ = ٢٣ - ١٤ت .

(٤) (٣ + ٢ت)^٢ = ٩ + ٢×٣×٢ت + ٤ت^٢

= ٩ + ١٢ت - ٤ = ٥ + ١٢ت .

(٥) (٤ + ٣ت)(٤ - ٣ت) = ١٦ - ٩ت^٢ = ١٦ + ٩

= ٢٥ .

"خذ بالك"

* (أ + ب)^٢ = أ^٢ + ٢أب + ب^٢
* (أ - ب)(أ + ب) = أ^٢ - ب^٢

«فرق بين مربعين»

(٦) $(1 - ت)^{4} = ((1 - ت)^{2})^{2} = (1 - 2ت + ت^{2})^{2} = (1 - 2ت - 1)^{2} = (-2ت)^{2}$
$= 4ت^{2} = -4$.

(٧) $(1 + ت)^{8} = ((1 + ت)^{2})^{4} = (1 + 2ت + ت^{2})^{4} = (2ت)^{4} = 16ت^{4} = 16$

*** تدريب *** أوجد ناتج ما يأتي في أبسط صورة :-

(١) $(-5 + ت) + (2 - 4ت)$ (٤) $(5 - 2ت)(5 + 2ت)$

(٢) $(1 - 7ت)(-3 + 2ت)$ (٥) $(1 + ت)^{4}$

(٣) $(3 - 2ت)^{2}$ (٦) $(2 + ت)^{6}$

مثال ⑤ :- أوجد س ، ص ∈ ح اللتين تحققان المعادلة

$7ت = (س + 3ت)(ص - ت) - 9$

الحل :- ∵ $7ت = (س + 3ت)(ص - ت) - 9$

∴ $7ت = س ص + 3ص ت - س ت - 3ت^{2} - 9$ ∵ $ت^{2} = -1$

∴ $7ت = س ص + 3ص ت - س ت + 3 - 9$

∴ $7ت = (س ص + 3 - 9) + (3ص - س) ت$

عددان مركبان متساويان ⇐ الحقيقي = الحقيقي ، التخيلي = التخيلي

∴ $س ص + 3 - 9 = 0$ ⇐ $س ص - 6 = 0$ ⟵ ①

∴ $3ص - س = 7$ ⇐ $س = 3ص - 7$ ⟵ ②

بالتعويض من ② في ① ⇐ $(3ص - 7) ص - 6 = 0$ ⇐ $3ص^{2} - 7ص - 6 = 0$

$(3ص + 2)(ص - 3) = 0$

(3ص 2) ، (ص -3)

$3ص + 2 = 0$ ⇐ $ص = \frac{-2}{3}$ في ② ⇐ $س = -9$

$ص - 3 = 0$ ⇐ $ص = 3$ في ② ⇐ $س = 2$

تدريب أوجد س ، ص ∈ ح اللتين تحققان المعادلة :-

$$٨ت = (س + ٢ت)(ص + ٢ت) + ١$$

"العددان المترافقان" :-

العددان أ + ب ت ، أ − ب ت يسميان عددان مترافقان

نلاحظ أن :- العدد المركب ومرافقه لا يختلفان إلا في إشارة الجزء التخيلي منها

مثال :- العدد ٣ + ٢ت مرافقه ٣ − ٢ت

العدد ٥ − ت مرافقه ٥ + ت

العدد ٤ت مرافقه −٤ت "لاحظ أن الجزء الحقيقي = صفر"

⊛ بعض خواص العددان المترافقان :-

(١) مجموع العددين المترافقين هو عدد حقيقي حيث (أ + ب ت) + (أ − ب ت) = ٢أ ∈ ح

مثال (٢ + ٣ت) + (٢ − ٣ت) = ٤

(٢) حاصل ضرب العددين المترافقين هو عدد حقيقي حيث (أ + ب ت)(أ − ب ت) = أ² + ب² ∈ ح

مثال (٢ + ٣ت)(٢ − ٣ت) = ٤ + ٩ = ١٣

(٣) يمكن إجراء عملية قسمة عدد مركب على آخر مركب بضرب كل منهما في العدد المرافق للمقام لجعل المقام عدداً حقيقياً .

مثال :- ضع العدد $\frac{١٠}{٣ + ت}$ على الصورة أ + ب ت

الحل :- بالضرب بسطاً ومقاماً في ٣ − ت

$$\frac{١٠}{٣ + ت} = \frac{١٠}{٣ + ت} \times \frac{٣ - ت}{٣ - ت} = \frac{١٠(٣ - ت)}{(٣ + ت)(٣ - ت)} = \frac{١٠(٣ - ت)}{٩ + ١} = ٣ - ت$$

تدريب ضع العدد $\frac{٥}{٢ - ت}$ في الصورة أ + ب ت .

مثال ⑥ :- اختصر لأبسط صورة :-

(1) $\frac{3+2ت}{2-5ت}$ ، (2) $\frac{(1-ت)(2+ت)}{(3-2ت)(1+ت)}$

الحل :-

(1) بالضرب بسطاً ومقاماً في $2+5ت$ $\Leftarrow$ $\frac{3+2ت}{2-5ت} = \frac{3+2ت}{2-5ت} \times \frac{2+5ت}{2+5ت}$

$= \frac{(3+2ت)(2+5ت)}{(2-5ت)(2+5ت)} = \frac{6+4ت+15ت+10ت^2}{4+25} = \frac{6+19ت-10}{29} = \frac{-4+19ت}{29}$

$= \frac{-4}{29} + \frac{19}{29}ت$ #

(2) $\frac{(1-ت)(2+ت)}{(3-2ت)(1+ت)} = \frac{2+ت-2ت-ت^2}{3+3ت-2ت-2ت^2} = \frac{2-ت+1}{3+ت+2} = \frac{3-ت}{5+ت}$

$\Leftarrow \frac{3-ت}{5+ت} = \frac{3-ت}{5+ت} \times \frac{5-ت}{5-ت} = \frac{15-5ت-3ت+ت^2}{25+1} = \frac{15-8ت-1}{26}$

$= \frac{14-8ت}{26} = \frac{14}{26} - \frac{8}{26}ت = \frac{7}{13} - \frac{4}{13}ت$.

---

* تدريب * أختصر لأبسط صورة :-

(1) $\frac{4-6ت}{2ت}$ ، (2) $\frac{26}{3-2ت}$ ، (3) $\frac{(3+ت)(2+ت)}{(3-ت)(2-ت)}$

مثال ⑦ :- إذا كان $س = \frac{13}{5-ت}$ ، $ص = \frac{3+2ت}{1+ت}$. اثبت أن س ، ص مترافقان ثم أوجد قيمة المقدار $س^2 + س ص + ص^2$

الحل :-

$س = \frac{13}{5-ت} \times \frac{5+ت}{5+ت} = \frac{13(5+ت)}{25+1} = \frac{13(5+ت)}{26} = \frac{5+ت}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}ت$ ①

$ص = \frac{3+2ت}{1+ت} \times \frac{1-ت}{1-ت} = \frac{3-3ت+2ت-2ت^2}{1+1} = \frac{3-ت+2}{2} = \frac{5-ت}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}ت$ ②

من ① ، ② ينتج أن س ، ص مترافقان #

قيمة المقدار $س^2 + س ص + ص^2 = (\frac{٥}{٢} + \frac{١}{٢}ت)^2 + (\frac{٥}{٢} + \frac{١}{٢}ت)(\frac{٥}{٢} - \frac{١}{٢}ت) + (\frac{٥}{٢} - \frac{١}{٢}ت)^2$

$= \frac{٢٥}{٤} + \frac{٥}{٢}ت + \frac{١}{٤}ت^2 + \frac{٢٥}{٤} + \frac{١}{٤} + \frac{٢٥}{٤} - \frac{٥}{٢}ت + \frac{١}{٤}ت^2$

$= \frac{٢٥}{٤} - \frac{١}{٤} + \frac{٢٥}{٤} + \frac{١}{٤} + \frac{٢٥}{٤} - \frac{١}{٤} = \boxed{\frac{٣٧}{٢}}$ #

تمارين على " مقدمة عن الأعداد المركبة "

١ أختر الإجابة الصحيحة :-

① $ت^6$ = ... [١ ، −١ ، ت ، −ت]

② مجموعة حل المعادلة $س^2 + ٩ = ٠$ في ك هي .... [{٣ت} ، {٣ت ، −٣ت} ، ∅ ، {٣ت ، −٣ت ، ٤}]

③ (٣ + ٥ت) + (٤ − ت) = ----- [١٧ ، ٧ + ٤ت ، ١٧ + ١٧ت ، ١٢ − ٥ت]

④ (٣ + ٥ت)(٤ − ت) = ----- [١٧ ، ٧ + ٤ت ، ١٧ + ١٧ت ، ١٢ − ٥ت]

⑤ المعكوس الضربي للعدد ٣ + ٢ت هو .... [٣ − ٢ت ، $\frac{٣}{١٣} - \frac{٢}{١٣}ت$ ، $\frac{١}{٣ - ٢ت}$ ، $\frac{٣}{٥} - \frac{٢}{٥}ت$]

⑥ إذا كان ن ∈ ص فإن $ت^{٨ن+٧}$ = ... [١ ، −١ ، ت ، −ت]

⑦ مرافق العدد ٣ + ٢ت هو ..... [٣ − ٢ت ، $\frac{٣}{١٣} - \frac{٢}{١٣}ت$ ، $\frac{١}{٣ - ٢ت}$ ، $\frac{٣}{٥} - \frac{٢}{٥}ت$]

⑧ حاصل ضرب عددين مترافقين يمكن أن يساوي .... [٩ − ٤ت ، ٥ت ، ١٣ ، ١ + ت]

⑨ إذا كان ٣س + ٢ت ص − ٦ + ٤ت س = ٠
فإن (س ، ص) = ... [(٢ ، ٣) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، −٤)]

---

٢ ضع في أبسط صورة كل مما يأتي :-

$ت^{٢٤}$ ، $ت^{٤٣}$ ، $ت^{-٤٣}$ ، $ت^{-٤٥}$ ، $\frac{١}{ت^{١٥}}$ ، $ت^{٤ن+٢}$

$ت^{٤ن+١٩}$ ، $ت^{٤ن+٤٢}$ ، $ت^{٤ن-١}$.

٣ أوجد قيمة $٣ + ٣ت^6 + ٣ت^{-1} + ٣ت^{-3} + ٣ت^{-4}$ في أبسط صورة .

٤ أوجد ناتج ما يأتي في أبسط صورة :-

(١) (٣ + ٥ت) + (١ - ٤ت)

(٢) (٣ + ٥ت) - (١ + ٥ت)

(٣) (٣ + ٥ت)(٣ - ٢ت)

(٤) (٤ - ٣ت)(٤ + ٣ت)

(٥) (٢ - ٥ت)^{٢}

(٦) (١ - ت)^{١٠}

٥ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :-

(١) ٣س^{٢} + ١٢ = ٠

(٢) ٤ص^{٢} + ٢٠ = ٠

(٣) $\frac{٣}{٥}$ص^{٢} + ١٥ = ٠

(٤) ٩س^{٢} + ١٢٥ = ٦١

(٥) ٤س^{٢} + ١٠ = ٧٥

(٦) س^{٢} - ٦س + ١٣ = ٠

٦ أوجد قيمتي س ، ص الحقيقيتين اللتين تحققان كل من المعادلات الآتية :-

(١) (٢س + ١) + ٤ص ت = ٥ - ١٢ت

(٢) (٢س - ٣) + (٣ص - ١) ت = ٧ + ١٠ت

(٣) (٢س - ص) + (س - ٢ص) ت = ٥ + ت

٧ ضع كلاً مما يأتي في أبسط صورة :-

(١) $\frac{٤ + ت}{ت}$

(٢) $\frac{٢}{١ + ت}$

(٣) $\frac{٢٦}{٣ - ٢ت}$

(٤) $\frac{٣ - ت}{٢ - ت}$

(٥) $\frac{٢ - ٣ت}{٣ + ت}$

(٦) $\frac{٣ + ٤ت}{٥ - ٢ت}$

(٧) $\frac{(٣ + ت)(٣ - ت)}{(٣ - ٤ت)}$

٨ إذا كان ل = $\frac{٢ + ت}{١ + ت}$ ، م = $\frac{١ + ٢ت}{١ + ت}$ أثبت أن ل ، م مترافقان

ثم احسب قيمة :- $\frac{١٥(ل^{٢} + م^{٢})}{٨ ل م (ل + م)}$.

٩ اثبت أن

(١) (√٣ + ت)^{١٢} + (√٣ - ت)^{١٢} = ٢^{١٣} .

(٢) (√٣ + ت)^{١٢} (√٣ - ت)^{١٢} = ٢^{٢٤} .

(٣) "تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية"

المميز :-

* جذرا المعادلة التربيعية $أ س^٢ + ب س + ج = ٠$ حيث $أ ، ب ، ج \in ح ، أ \neq ٠$

هما $\frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤ أ ج}}{٢ أ}$ ، $\frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤ أ ج}}{٢ أ}$ وكلاهما يحتوى على المقدار $\sqrt{ب^٢ - ٤ أ ج}$

* يسمى المقدار $ب^٢ - ٤ أ ج$ " مميز المعادلة التربيعية " ويستخدم لتحديد نوع جذرى

المعادلة التربيعية حسب الحالات الآتية :-

(١) إذا كان المميز موجبًا أى أن " $ب^٢ - ٤ أ ج > ٠$ "

فإن للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

ومنحنى الدالة $د(س) = أ س^٢ + ب س + ج$ يقطع

محور السينات فى نقطتين احداثياهما السينيين هما جذرا المعادلة

(٢) إذا كان المميز = صفر أى أن " $ب^٢ - ٤ أ ج = ٠$ "

فإن للمعادلة جذران حقيقيان متساويان

ومنحنى الدالة $د(س) = أ س^٢ + ب س + ج$ يمس

محور السينات فى نقطة واحدة إحداثيها السينى هو جذر المعادلة وهذه النقطة

هى $(\frac{-ب}{٢ أ} ، ٠)$ ويكون الجذر هو $\frac{-ب}{٢ أ}$.

(٣) إذا كان المميز سالبًا أى أن " $ب^٢ - ٤ أ ج < ٠$ "

فإن للمعادلة جذران مركبان " غير حقيقيان "

وهما عددان مترافقان دائمًا .

ومنحنى الدالة $د(س) = أ س^٢ + ب س + ج$ لا يشترك

مع محور السينات فى أى نقطة (لا يقطعه ولا يمسه)

مثال ① :- عين نوع جذري كل من المعادلات الآتية دون حلها

(1) $3س^2 + 4س - 6 = 0$ (3) $4س^2 + 12س + 9 = 0$

(2) $س^2 + 5س - 3 = 0$ (4) $25س^2 + س + 1 = 0$

الحل :-

(1) ∵ $3س^2 + 4س - 6 = 0$ | $أ = 3$ ، $ب = 4$ ، $جـ = -6$

المميز $= ب^2 - 4أجـ = 16 - 4 \times 3 \times -6 = 16 + 72 = 88 > 0$

∴ الجذران حقيقيان مختلفان .

(2) ∵ $س^2 + 5س - 3 = 0$ | $أ = 1$ ، $ب = 5$ ، $جـ = -3$

المميز $= ب^2 - 4أجـ = 25 - 4 \times 1 \times -3 = 25 + 12 = 37 > 0$

∴ الجذران حقيقيان مختلفان

(3) ∵ $4س^2 + 12س + 9 = 0$ | $أ = 4$ ، $ب = 12$ ، $جـ = 9$

المميز $= ب^2 - 4أجـ = 144 - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144 = 0$

∴ الجذران حقيقيان متساويان

(4) ∵ $25س^2 + س + 1 = 0$ | $أ = 25$ ، $ب = 1$ ، $جـ = 1$

المميز $= ب^2 - 4أجـ = 1 - 4 \times 25 \times 1 = 1 - 100 = -99 < 0$

∴ الجذران غير حقيقيان (مركبان)

*** تدريب *** عين نوع جذري كل من المعادلات الآتية :-

(1) $س^2 - 2س + 5 = 0$ (4) $س(س - 2) = 6$

(2) $س^2 - 10س + 25 = 0$ (5) $(س - 3)^2 - 2س = 1$

(3) $3س^2 + 10س = 4$ (6) $(س - 2)(س + 4) = 3$

"ملاحظات"

(١) المعادلة $أ س^2 + ب س + جـ = ٠$ يكون لها جذور حقيقية إذا كان $ب^2 - ٤ أ جـ \geq ٠$.

(٢) إذا كانت المعاملات أ ، ب ، جـ أعداد نسبية وكان $ب^2 - ٤ أ جـ$ مربع كامل (لا صفر) فإن الجذران يكونان حقيقيين نسبيين (مهمة).

(٣) إذا كان $جـ = ٠ \Leftarrow أ س^2 + ب س = ٠ \Leftarrow س(أ س + ب) = ٠$

$\boxed{س = ٠}$ | $أ س + ب = ٠$ ، $\boxed{س = \frac{-ب}{أ}}$

(٤) إذا كان $ب = ٠ \Leftarrow أ س^2 + جـ = ٠$

$\Leftarrow أ س^2 = -جـ \Leftarrow س^2 = \frac{-جـ}{أ} \stackrel{\sqrt{}}{\Leftarrow} س = \pm\sqrt{\frac{-جـ}{أ}}$

مثال ②: - إذا كان جذرا المعادلة $٣ س^2 + ٦ س + ل = ٠$ متساويان. أوجد ل

الحل: - ∵ الجذران متساويان $\Leftarrow ب^2 - ٤ أ جـ = ٠$

$\Leftarrow ٣٦ - ٤ \times ٣ \times ل = ٠ \Leftarrow ٣٦ - ١٢ ل = ٠ \Leftarrow ١٢ ل = ٣٦ \stackrel{(\div ١٢)}{\Leftarrow} \boxed{ل = ٣}$

مثال ③: - إذا كان أ ، ب عددين نسبيين فأثبت أن جذري المعادلة
$أ س^2 + (أ^2 + ب^2) س + أ ب^2 = ٠$ نسبيان

الحل: - ∵ المعاملات أعداد نسبية ∴ يجب إثبات أن المميز مربع كامل.

| أ = أ | ب = $أ^2 + ب^2$ | جـ = $أ ب^2$ |

∵ $ب^2 - ٤ أ جـ = (أ^2 + ب^2)^2 - ٤ \times أ \times أ ب^2 =$

$= أ^4 + ٢ أ^2 ب^2 + ب^4 - ٤ أ^2 ب^2 = ٠ \Leftarrow أ^4 - ٢ أ^2 ب^2 + ب^4$

$= (أ^2 - ب^2)^2$ "مربع كامل"

∵ المعاملات أعداد نسبية ، ∵ المميز مربع كامل

∴ الجذران نسبيان #

* تدريب * (1) إذا كان جذرا المعادلة $س^2 + 4س + ل = 0$ متساويين. أوجد ل

(2) إذا كان أ ، ب أعداد نسبية فأثبت أن جذري المعادلة

أ$س^2$ + (أ + ب)س + ب = 0 نسبيان.

مثال ③ أثبت أن جذري المعادلة $س^2 - 2س + 5 = 0$ مركبان وأوجدهما.

الحل :- ∵ $ب^2 - 4أج = 4 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16 < 0$

∴ الجذران مركبان.

| أ = 1 ، ب = -2 ، ج = 5 |

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أج}}{2أ} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16ت^2}}{2} = \frac{2 \pm 4ت}{2}$

$= \frac{2(1 \pm 2ت)}{2} = 1 \pm 2ت$ ∴ جذرا المعادلة هما 1 + 2ت ، 1 - 2ت

---

* تدريب * أثبت أن جذري المعادلة $س^2 - 3س + 1 = 0$ مركبان وأوجدهما.

مثال ④ :- إذا كان جذرا المعادلة $س^2 - لس + 2ل - 4س + 5 = 0$ متساويين فأوجد قيمة ل الحقيقية ثم أوجد الجذرين.

الحل :- ∵ $س^2 - لس + 2ل - 4س + 5 = 0$ "نضع المعادلة في الصورة العامة"

$س^2 - (ل + 4)س + (2ل + 5) = 0$

| أ = 1 ، ب = -(ل + 4) ، ج = 2ل + 5 |

∵ الجذران متساويان ∴ $ب^2 - 4أج = 0$

⇐ $(ل + 4)^2 - 4 \times 1 \times (2ل + 5) = 0$

⇐ $ل^2 + 8ل + 16 - 8ل - 20 = 0$ ⇐ $ل^2 - 4 = 0$ ⇐ $ل^2 = 4$

∴ $ل = \pm 2$

⊛ عندما ل = 2 ⇐ المعادلة هي $س^2 - 6س + 9 = 0$ (بالتحليل)

$(س - 3)(س - 3) = 0$ ⇐ $س - 3 = 0$ ⇐ $س = 3$

أي أن عند ك = ٢ يكون الجذران متساويان وكل منهما = ٣ .

⊛ عند ك = -٢ ⇐ المعادلة هي س² - ٢س + ١ = ٠ . (بالتحليل)

(س - ١)(س - ١) = ٠ ⇐ س - ١ = ٠ ⇐ س = ١

أي أن عند ك = -٢ يكون الجذران متساويان وكل منهما = ١ .

---

* تدريب * أوجد قيم ك الحقيقية التي تجعل جذري المعادلة ٣س² - ٦س + ك = ٠ متساويان . ثم أوجد هذين الجذرين .

مثال ⑤ :- أوجد قيم ك الحقيقية التي تحقق المعادلة س² + ٢(ك-١)س + ك² = ٠ لها جذران حقيقيان (لها حل ضح) .

الحل :- ∵ المعادلة لها جذران حقيقيان

أ = ١ ، ب = ٢(ك-١) ، جـ = ك²

∴ ب² - ٤أجـ ≥ ٠ ⇐ ٤(ك-١)² - ٤ × ١ × ك² ≥ ٠

٤(ك² - ٢ك + ١) - ٤ك² ≥ ٠ ⇐ ٤ك² - ٨ك + ٤ - ٤ك² ≥ ٠

-٨ك + ٤ ≥ ٠ ⇐ -٨ك ≥ -٤ ⇐(÷ -٨) ك ≤ ١/٢

∴ المعادلة لها جذران حقيقيان إذا كانت ك ∈]-∞ ، ١/٢]

⊛ تدريب * ① أوجد قيم ك التي تجعل للمعادلة س² + ٤س + ك = ٠ جذرين حقيقيين مختلفين

② أوجد قيم م التي تجعل للمعادلة س² - (٢م-١)س + م² = ٠ ليس لها جذور حقيقية (ليس لها حل ضح) .

تمارين على " تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية "

[1] اختر الإجابة الصحيحة :-

① إذا كان جذرا المعادلة التربيعية أ س^٢ + ب س + جـ = ٠ غير حقيقيين فإن ب^٢ - ٤ أ جـ ......

أ) > ٠   ب) < ٠   جـ) = ٠   د) = ١

② إذا كان جذرا المعادلة ٢ س^٢ + ٤ س + ك = ٠ متساويان فإن ك = ...

أ) -٢   ب) ٢   جـ) -½   د) ½

③ إذا كان جذرا المعادلة س^٢ = ٢ س - ك حقيقيين مختلفين فإن ك ∈ ......

أ)]-∞ ، ١[ب)]-∞ ، ١]   جـ) [١ ، ∞[د)]١ ، ∞[

④ يكون جذرا المعادلة ك س^٢ - ١٢ س + ٩ = ٠ مركبين إذا كانت ......

أ) ك > ٤   ب) ك < ٤   جـ) ك = ٤   د) ك = ١

[2] حدد نوع جذري كل من المعادلات الآتية دون حلها :-

(١) س^٢ - ٢ س + ٥ = ٠

(٢) ٣ س^٢ + ١٠ س - ٤ = ٠

(٣) س^٢ - ١٠ س + ٢٥ = ٠

(٤) ٦ س^٢ - ١٩ س = -٣٥

(٥) (س - ١١) - س (س - ٦) = ٠

(٦) (س - ١)(س - ٧) = ٢ (س - ٣)(س - ٤)

[3] أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية باستخدام القانون العام :-

(١) س^٢ - ٤ س + ٥ = ٠

(٢) ٢ س^٢ + ٦ س + ٥ = ٠

(٣) ٣ س^٢ = ٧ س - ٦

(٤) س (٤ س - ١) + ١ = ٠

[4] أوجد قيمة ك في كل من الحالات الآتية :-

(١) إذا كان جذرا المعادلة س^٢ + ٤ س + ك = ٠ حقيقيين مختلفين .

(٢) إذا كان جذرا المعادلة س^٢ - ٣ س + ٢ + ك/ك = ٠ متساويين .

(٣) إذا كان جذرا المعادلة ك س^٢ - ٨ س + ١٦ = ٠ مركبين .

٥ إذا كان ل، م عددين نسبيين فأثبت أن جذري المعادلة

ل س^2 + (ل - م) س - م = ٠ عددان نسبيان.

٦ إذا كان جذرا المعادلة س^2 + ٢(ك - ١) س + (٢ك + ١) = ٠ متساويان

فأوجد قيم ك الحقيقية ثم أوجد الجذرين.

٧ أوجد قيمة ك إذا كان :-

(١) جذرا المعادلة س^2 = ك + ٢ حقيقيان مختلفان.

(٢) جذرا المعادلة (م - ١) س^2 - ٢م س + م = ٠ غير حقيقيين.

٨ اثبت أنه لجميع قيم أ الحقيقية عدا الصفر يكون للمعادلة :-

(أ^2 + ١) س^2 + ٢أ س + ١ = ٠ جذور حقيقية

٩ يقدر عدد سكان جمهورية مصر العربية عام ٢٠١٣م بالعلاقة :-

ع = ن^2 + ٢٠ ن + ٩١ حيث ع عدد السكان بالمليون، ن عدد السنوات

(١) كم كان عدد السكان عام ٢٠١٣م ؟

(٢) قدر عدد السنوات التي يبلغ السكان فيها ٣٢٤ مليون

(٣) قدر عدد السكان عام ٢٠٢٣م ؟

---

١٠ قطعة أرض على شكل مستطيل بعداه ٩، ٦ من الأمتار، يراد مضاعفة مساحة هذه القطعة وذلك بزيادة طول كل من بعديها بنفس المقدار

أوجد المقدار المضاف.

(٤) "العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها"

تمهيد :-

نعلم أن جذري المعادلة $٦س^٢ - ١٣س + ٦ = ٠$ هما $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$

نلاحظ أن :- * مجموع الجذرين $= \frac{٢}{٣} + \frac{٣}{٢} = \frac{١٣}{٦} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢}$

* حاصل ضربهما $= \frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٦}{٦} = ١ = \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢}$

⊛ **مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين :-**

جذرا المعادلة التربيعية $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ هما $\frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$ ، $\frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

باعتبار الجذر الأول = ل ، الجذر الآخر = م فإن :-

$$ل + م = \frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} + \frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{-٢ب}{٢أ} = \frac{-ب}{أ}$$

$$ل م = \frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} \times \frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{ب^٢ - (ب^٢ - ٤أجـ)}{٤أ^٢} = \frac{٤أجـ}{٤أ^٢} = \frac{جـ}{أ}$$

"الخلاصة" :-

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ فإن

* $ل + م = \frac{-ب}{أ}$ أي أن مجموع الجذرين $= \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢}$
* $ل م = \frac{جـ}{أ}$ أي أن حاصل ضربهما $= \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢}$

(مهمة)

مثال ① :- دون حل المعادلة أوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهما لكل من المعادلات الآتية :-

(١) $س^٢ - ٧س - ٣ = ٠$ (٣) $(٢س - ٣)(س + ٢) = ٠$

(٢) $٣س^٢ = ٣٢س - ٣٠$

الحل :-

(١) $س^٢ - ٧س - ٣ = ٠$ $\Leftarrow$ $أ = ١$ ، $ب = -٧$ ، $جـ = -٣$

$\therefore$ مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ} = \frac{٧}{١} = \boxed{٧}$ ، حاصل ضربهما $= \frac{جـ}{أ} = \frac{-٣}{١} = \boxed{-٣}$

(٢) $٣س^٢ = ٢س - ٣٠ \Leftarrow ٣س^٢ - ٢س + ٣٠ = ٠$ $أ = ٣ ، ب = -٢ ، جـ = ٣٠$

∴ مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ} = \boxed{\frac{٢}{٣}}$ ، حاصل ضربهما $= \frac{جـ}{أ} = \frac{٣٠}{٣} = \boxed{١٠}$

(٣) $(٢س - ٣)(س + ٢) = ٠ \Leftarrow ٢س^٢ - ٣س + ٤س - ٦ = ٠$

$\Leftarrow ٢س^٢ + س - ٦ = ٠$ $أ = ٢ ، ب = ١ ، جـ = -٦$

∴ مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ} = \boxed{\frac{-١}{٢}}$ ، حاصل ضربهما $= \frac{جـ}{أ} = \frac{-٦}{٢} = \boxed{-٣}$

*** تدريب *** أوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهما لكل من المعادلات الآتية :

(١) $٥س^٢ + ٤س + ١ = ٠$ (٣) $س(س - ٢) = ٤$

(٢) $٣س^٢ + ٥ = ٤س$ (٤) $(س - ١)(٢س + ٣) = ٠$

مثال ⑤ :- إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $س^٢ - ٢س + ك = ٠$ يساوي ٥
أوجد قيمة ك ثم حل المعادلة .

الحل :- ∵ $س^٢ - ٢س + ك = ٠$ $أ = ١ ، ب = -٢ ، جـ = ك$

∵ حاصل ضرب الجذرين $= ٥ \Leftarrow \frac{جـ}{أ} = ٥$

$\Leftarrow \frac{ك}{١} = ٥ \Leftarrow \boxed{ك = ٥}$ ∴ المعادلة هي :- $س^٢ - ٢س + ٥ = ٠$

نحل بالقانون :- $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ١ \times ٥}}{٢ \times ١} = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٢٠}}{٢}$

$= \frac{٢ \pm \sqrt{-١٦}}{٢} = \frac{٢ \pm \sqrt{١٦ت^٢}}{٢} = \frac{٢ \pm ٤ت}{٢} = \frac{٢(١ \pm ٢ت)}{٢} = ١ \pm ٢ت$

∴ م.ح $= \{١ + ٢ت ، ١ - ٢ت\}$

*** تدريب *** إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $٢س^٢ - ٣س + ك = ٠$
يساوي ١ أوجد قيمة ك ثم حل المعادلة

مثال ③ :- إذا كان -1 ، 5 هما جذرا المعادلة $أ س^2 + ب س - 5 = 0$.

أوجد قيمة كل من أ ، ب

أ = أ
ب = ب
جـ = -5

الحل :: مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ}$ ⇐ $-1 + 5 = \frac{-ب}{أ}$ ⇐ $4 = \frac{-ب}{أ}$ ⟵ ①

:: حاصل ضربهما $= \frac{جـ}{أ}$ ⇐ $-1 \times 5 = \frac{-5}{أ}$ ⇐ $-5 = \frac{-5}{أ}$ ⇐ $\boxed{أ = 1}$

في ① ⇐ $4 = \frac{-ب}{1}$ ⇐ $\boxed{ب = -4}$

مثال ④ :- إذا كان $(3 + 4 ت)$ أحد جذور المعادلة $س^2 - 6 س + ل = 0$.

حيث ل ∈ ح - ت . ح أوجد الجذر الآخر ، قيمة ل .

الحل :-

خد بالك :-
إذا كان جذرا المعادلة عددان مركبان فإنهما يكونان مترافقان

:: $(3 + 4 ت)$ جذر للمعادلة ⇐ $(3 - 4 ت)$ هو الجذر الآخر

:: مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ} = 6$

:: حاصل ضربهما $= \frac{جـ}{أ}$ ⇐ $(3 + 4 ت)(3 - 4 ت) = ل$

⇐ $9 + 16 = ل$ ⇐ $\boxed{ل = 25}$

⊛ هناك حل آخر لهذه المسألة وذلك بالتعويض عن $س = 3 + 4 ت$ في المعادلة ثم نوجد ل ثم نحل المعادلة بالقانون لإيجاد الجذر الآخر .

---

* تدريب * (1) إذا كان -3 ، 7 جذرا المعادلة $أ س^2 - ب س - 21 = 0$.

أوجد قيمة أ ، ب .

(2) إذا كان $(2 - ت)$ أحد جذري المعادلة $س^2 - 4 س + ل = 0$.

حيث ل ∈ ح - ت . ح أوجد الجذر الآخر ، قيمة ل .

"ملاحظة هامة" في المعادلة التربيعية $أس^2 + ب س + جـ = 0$

(1) إذا كان أ = 1 ⟸ ل + م = -ب ، ل م = جـ

(2) إذا كان ب = 0 ⟸ ل + م = 0 ⟸ ل = -م

أي أنه :- **إذا كان أحد الجذرين معكوس جمعي للآخر فإن ب = صفر** (مهمة جداً)

(3) إذا كان أ = جـ ⟸ ل م = 1 ⟸ $ل = \frac{1}{م}$

أي أنه :- **إذا كان أحد جذري المعادلة معكوس ضربي للآخر فإن أ = جـ** (مهمة جداً)

مثال (5) :- أكمل :-

(1) إذا كان أحد جذري المعادلة $3س^2 + (م-3)س + 7 = 0$ معكوساً جمعياً للآخر فإن م = ...

(2) إذا كان أحد جذري المعادلة $2م س^2 + 7س + م^2 + 1 = 0$ معكوساً ضربياً للآخر فإن م = ...

الحل :-

(1) ∵ أحد الجذرين معكوس جمعي للآخر ⟸ ب = 0 ⟸ م - 3 = 0 ⟸ **م = 3**

(2) ∵ أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر ⟸ أ = جـ ⟸ $2م = م^2 + 1$

⟸ $م^2 - 2م + 1 = 0$ ⟸ (م - 1)(م - 1) = 0 ⟸ **م = 1**

بعض الملاحظات الهامة للتمارين اللفظية :-

* أحد الجذرين ضعف الآخر "ل ، 2ل" ، * أحد الجذرين ثلاثة أمثال الآخر "ل ، 3ل"
* أحد الجذرين مربع الآخر "ل ، $ل^2$" ، * النسبة بين الجذرين = 3 : 4 "3ل ، 4ل"
* مجموع الجذرين = 5 "ل ، 5 - ل" ، * أحد الجذرين يزيد عن الآخر بمقدار 4 "ل ، ل + 4"
* أحد الجذرين ثلاثة أمثال المعكوس الجمعي للجذر الآخر "ل ، -3ل"
* أحد الجذرين ثلاثة أمثال المعكوس الضربي للجذر الآخر "ل ، $\frac{3}{ل}$"
* أحد الجذرين يزيد عن المعكوس الجمعي للآخر بمقدار 4 "ل ، -ل + 4"

مثال ⑥ :- إذا كان أحد جذري المعادلة س^2 + 3س + ك = 0 ضعف الجذر الآخر أوجد قيمة ك .

أ = 1 ، ب = 3 ، جـ = ك

الحل :- نفرض أحد الجذرين = ل ∴ الجذر الآخر = 2ل .

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ ⟸ ل + 2ل = $\frac{-3}{1}$ ⟸ 3ل = −3 ⟸(÷3) ل = −1 ⟵ ①

∴ حاصل ضربهم = $\frac{جـ}{أ}$ ⟸ ل × 2ل = $\frac{ك}{1}$ ⟸ 2ل^2 = ك من ①

⟸ 2(−1)^2 = ك ⟸ ك = 2 .

مثال ⑦ :- أوجد قيمة م التي تجعل أحد جذري المعادلة س^2 + 21 = م س يزيد عن ضعف الجذر الآخر بمقدار 1

أ = 1 ، ب = −م ، جـ = 21

الحل :- ∵ س^2 + 21 = م س ⟸ س^2 − م س + 21 = 0

نفرض أحد الجذرين = ل ∴ الجذر الآخر = 2ل + 1

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ ⟸ ل + 2ل + 1 = $\frac{م}{1}$ ⟸ 3ل + 1 = م ⟵ ①

∴ حاصل ضربهم = $\frac{جـ}{أ}$ ⟸ ل(2ل + 1) = $\frac{21}{1}$ ⟸ 2ل^2 + ل − 21 = 0

⟸ (2ل + 7)(ل − 3) = 0

(2ل ، 7 ، ل ، 3 : 7ل − 6ل)

2ل + 7 = 0	ل − 3 = 0
ل = $\frac{-7}{2}$	ل = 3
في ① ⟸	في ① ⟸
3 × $\frac{-7}{2}$ + 1 = م	3 × 3 + 1 = م
⟸ م = $\frac{-19}{2}$	⟸ م = 10

---

* **تدريبات** *

(1) إذا كان أحد جذري المعادلة س^2 + 5س + ك = 0 ضعف المعكوس الجمعي للجذر الآخر أوجد قيمة ك

(2) أوجد قيمة ك التي تجعل جذري المعادلة س^2 − ك س + 12 = 0 ثلاثة أمثال الجذر الآخر.

مثال ⑧ :- أوجد الشرط اللازم لكي يكون أحد جذري المعادلة
أ س² + ب س + جـ = ٠ مساوياً المعكوس الجمعي لضعف الجذر الآخر

الحل :- نفرض أحد الجذرين = ل		∴ الجذر الآخر = -٢ل

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ ⟸ ل - ٢ل = $\frac{-ب}{أ}$ ⟸ -ل = $\frac{-ب}{أ}$ ⟸ $\boxed{ل = \frac{ب}{أ}}$ ①

∴ حاصل ضربهما = $\frac{جـ}{أ}$ ⟸ ل × -٢ل = $\frac{جـ}{أ}$ ⟸ $\boxed{-٢ل^{٢} = \frac{جـ}{أ}}$ ②

بالتعويض من ① في ② ⟸ $-٢\left(\frac{ب}{أ}\right)^{٢} = \frac{جـ}{أ}$ ⟸ $\frac{-٢ب^{٢}}{أ^{٢}} = \frac{جـ}{أ}$

⟸ $\frac{-٢ب^{٢}}{أ} = جـ$ ⟸ أ جـ = -٢ب² ⟸ $\boxed{٢ب^{٢} + أ جـ = ٠}$ "الشرط المطلوب"

---

* تدريب * أوجد الشرط اللازم لكي يكون أحد جذري المعادلة
أ س² + ب س + جـ = ٠ مساوياً ضعف الجذر الآخر.

مثال ⑨ :- أوجد قيمة أ التي تجعل جذري المعادلة س² - ٣س + ٢ + $\frac{١}{أ}$ متساويان

الحل :- ∵ الجذران متساويان ⟸ ب² - ٤أجـ = ٠

أ = ١
ب = -٣
جـ = ٢ + $\frac{١}{أ}$

⟸ ٩ - ٤ × ١ × (٢ + $\frac{١}{أ}$) = ٠ ⟸ ٩ - ٤(٢ + $\frac{١}{أ}$) = ٠

٩ - ٨ - $\frac{٤}{أ}$ = ٠ ⟸ ١ - $\frac{٤}{أ}$ = ٠

١ = $\frac{٤}{أ}$ ⟸ $\boxed{أ = ٤}$

مثال ⑩ :- إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة ٢س² + ٧س + ٣ك = ٠ يساوي
مجموع جذري المعادلة س² - (ك+٤)س = ٠		أوجد قيمة ك

الحل :- حاصل ضرب جذري المعادلة الأولى = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{٣ك}{٢}$ ، مجموع جذري الثانية = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{ك+٤}{١}$

∴ $\frac{٣ك}{٢} = \frac{ك+٤}{١}$ ⟸ ٣ك = ٢ك + ٨ ⟸ $\boxed{ك = ٨}$ #

تمارين على "العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها"

[١] اختر الاجابة الصحيحة :-

① مجموع جذري المعادلة س² + ٢س + ١٥ = ٠ يساوي ..... [٢ ، -٢ ، ١٥ ، -١٥]

② حاصل ضرب جذري المعادلة ٤س² - ٣س + ٥ = ٠ يساوي ..... [٣/٤ ، -٣/٤ ، ٥/٤ ، -٥/٤]

③ مجموع جذري المعادلة س² - ٥س + ٦ = ٠ يساوي .... [-٥ ، -٦ ، ٥ ، ٦]

④ إذا كان مجموع جذري المعادلة ٢ك س² + (ك - ١٤) س - ٧ = ٠ يساوي ٣ فإن ك = ...

[-٢ ، -٧ ، ٢ ، ٧]

⑤ إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة ك س² + س + ٢ = ٠ يساوي ١ فإن ك = ...

[-٢ ، -١ ، ٢ ، ١]

⑥ إذا كان أحد جذري المعادلة ٢س² - (ك + ٣) س + ك = ٠ معكوس جمعي للآخر فإن ك = ...

[-٢ ، -٣ ، ٢ ، ٣]

⑦ إذا كان أحد جذري المعادلة ٢س² - (ك + ٣) س + ك = ٠ معكوس ضربي للآخر فإن ك = ...

[-٢ ، -٣ ، ٢ ، ٣]

⑧ إذا كان أحد جذري المعادلة س² - ك س + ١٢ = ٠ ثلاثة أمثال الآخر فإن ك = ...

[-٨ ، ٨ ، ±٨ ، صفر]

[٢] دون حل المعادلة أوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهما لكل من المعادلات الآتية :-

(١) ٤س² + ٤س - ٣٥ = ٠   (٣) (٣س + ٢)(٢س - ٥) = ٠

(٢) ٣س² - ٧ = ١٢س   (٤) ١/(س - ٢) + ١/(س + ٢) = ٣ ، س ≠ ±٢

[٣] إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة ٣س² + ١٠س - ج = ٥/٣ أوجد قيمة ج

ثم حل المعادلة في مجموعة الأعداد المركبة

[٤] إذا كان مجموع جذري المعادلة ٢س² + ب س - ٥ = ٠ هو -٣/٢ أوجد قيمة ب

ثم حل المعادلة في مجموعة الأعداد المركبة .

(٥) أوجد الجذر الآخر للمعادلة ثم أوجد قيمة أ في كل مما يأتي :-

(١) إذا كان س = -١ أحد جذري المعادلة س² - ٢س + أ = ٠

(٢) إذا كان ١ + ت أحد جذري المعادلة س² - ٢س + أ = ٠

(٦) أوجد قيمتي أ ، ب من كل من المعادلات الآتية إذا كان :-

(١) ٢ ، ٥ جذرا المعادلة س² + أس + ب = ٠

(٢) -١ ، $\frac{٣}{٢}$ جذرا المعادلة أس² - س + ب = ٠

(٣) $\sqrt{٣}$ ت ، -$\sqrt{٣}$ ت جذرا المعادلة س² + أس + ب = ٠

(٧) أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذري المعادلة ٤ك س² + ٧س + ك² + ٤ = ٠ هو المعكوس الضربي للجذر الآخر

(٨) أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذري المعادلة س² + (ك - ١)س - ٣ = ٠ هو المعكوس الجمعي للجذر الآخر

(٩) إذا كان أحد جذري المعادلة ٨س² - ٣٠س + جـ = ٠ يساوي مربع الجذر الآخر أوجد قيمة جـ

(١٠) إذا كانت النسبة بين جذري المعادلة أس² + ب س + جـ = ٠ كنسبة ٢ : ٣ اثبت أن ٢٥ أ جـ = ٦ ب²

(١١) أوجد الشرط اللازم لكي يكون أحد جذري المعادلة أس² + ب س + جـ = ٠ نصف الجذر الآخر .

(١٢) إذا كان مجموع جذري المعادلة س² - (ك + ٢)س + ٦ = ٠ يساوي حاصل ضرب جذري المعادلة س² + ٥ك س + ك² = ٠ . أوجد قيمة ك

(٥) تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها"

* إذا فرضنا أن ل ، م هما جذري المعادلة التربيعية $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ ، $أ \neq ٠$

بالقسمة على أ ⇐ $س^٢ + (\frac{ب}{أ}) س + \frac{جـ}{أ} = ٠$ ⟵ ①

ونعلم أن $ل + م = \frac{-ب}{أ}$ ، $ل م = \frac{جـ}{أ}$ بالتعويض في ①

⇐ المعادلة تكون على الصورة $س^٢ - (ل + م) س + ل م = ٠$

أي أن $س^٢ - (\text{مجموع الجذرين}) س + \text{حاصل ضرب الجذرين} = ٠$ | مهمة

ويمكن أيضاً أن تكتب المعادلة على الصورة :- $(س - ل)(س - م) = ٠$

مثال ① :- كون المعادلة التربيعية التي جذراها :-

(١) ٣ ، ٥ (٣) $٣ + ٤ت$ ، $٣ - ٤ت$

(٢) $٢ + \sqrt{٥}$ ، $٢ - \sqrt{٥}$ (٤) $\frac{-٢ + ٢ت}{١ + ت}$ ، $\frac{-٢ - ٤ت}{٢ - ت}$

الحل :-

(١) مجموع الجذرين $= ٣ + ٥ = \boxed{٨}$ ، حاصل ضربهما $= ٣ \times ٥ = \boxed{١٥}$

∴ المعادلة تكون على الصورة $س^٢ - (\text{مجموع الجذرين}) س + \text{حاصل ضرب الجذرين} = ٠$

⇐ $س^٢ - ٨ س + ١٥ = ٠$ #

(٢) مجموع الجذرين $= ٢ + \sqrt{٥} + ٢ - \sqrt{٥} = \boxed{٤}$ ، حاصل ضربهما $= (٢ + \sqrt{٥})(٢ - \sqrt{٥}) = ٤ - ٥ = \boxed{-١}$

⇐ $س^٢ - ٤ س - ١ = ٠$ #

(٣) مجموع الجذرين $= ٣ + ٤ت + ٣ - ٤ت = \boxed{٦}$ ، حاصل ضربهما $= (٣ + ٤ت)(٣ - ٤ت) = ٩ + ١٦ = \boxed{٢٥}$

⇐ $س^٢ - ٦ س + ٢٥ = ٠$

(٤) نضع كل جذر في أبسط صورة أولاً :. لنفرض أن الجذرين ل ، م

⇐ $ل = \frac{-٢ + ٢ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{(-٢ + ٢ت)(١ - ت)}{(١ + ت)(١ - ت)} = \frac{-٢ + ٢ت + ٢ت - ٢ت^٢}{١ + ١} = \frac{-٢ + ٤ت + ٢}{٢}$

= $\frac{٢ت}{١}$ = ٢ت ← ①

م = $\frac{-٢-٤ت}{٢-ت} \times \frac{٢+ت}{٢+ت} = \frac{(-٢-٤ت)(٢+ت)}{(٢-ت)(٢+ت)} = \frac{-٤-٨ت-٢ت-٤ت^2}{٤+١} = \frac{-٤-١٠ت+٤}{٥}$

= $\frac{-١٠ت}{٥}$ = −٢ت ← ②

∴ ل + م = ٢ت + (−٢ت) = صفر ، ل م = ٢ت × −٢ت = −٤ت^2 = ٤

∴ المعادلة هي س^2 − صفر س + ٤ = ٠ ⟸ س^2 + ٤ = ٠

---

* تدريب * كون المعادلة التربيعية التي جذراها :-

(١) ٤ ، −٧ (٣) ١ + ٥ت ، ١ − ٥ت

(٢) $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٤}$ (٤) ٣ − ٢ت ، $\frac{٤+٧ت}{٢+ت}$

---

* تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى

مثال ② :- إذا كان ل ، م جذرا المعادلة س^2 − ٧س + ٣ = ٠ أوجد المعادلة التي جذراها ل + ١ ، م + ١

الحل :- * تحل أي مسألة من هذا النوع بالخطوات التالية :-

أ = ١ ، ب = −٧ ، جـ = ٣

المعادلة المعطاه :- * مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ ⟸ ل + م = ٧

* حاصل ضربهما = $\frac{جـ}{أ}$ ⟸ ل م = ٣

المعادلة المطلوبة :- * مجموع الجذرين = ل + ١ + م + ١ = (ل + م) + ٢ = ٧ + ٢ = ⑨

* حاصل ضربهما = (ل + ١)(م + ١) = ل م + ل + م + ١ = ٣ + ٧ + ١ = ⑪

∴ المعادلة المطلوبة هي س^2 − ٩س + ١١ = ٠

---

* تدريب * إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س^2 − ٢س + ٥ = ٠ . كون المعادلة التي جذراها ل + ٢ ، م + ٢

⊛ بعض المتطابقات الهامة المستخدمة في هذه المسائل :-

* $\text{ل}^2 + \text{م}^2 = (\text{ل}+\text{م})^2 - 2\,\text{ل}\,\text{م}$
* $(\text{ل}-\text{م})^2 = (\text{ل}+\text{م})^2 - 4\,\text{ل}\,\text{م}$
* $\text{ل}^3 + \text{م}^3 = (\text{ل}+\text{م})\left[(\text{ل}+\text{م})^2 - 3\,\text{ل}\,\text{م}\right]$
* $\text{ل}^3 - \text{م}^3 = (\text{ل}-\text{م})\left[(\text{ل}+\text{م})^2 - \text{ل}\,\text{م}\right]$
* $\frac{1}{\text{ل}} + \frac{1}{\text{م}} = \frac{\text{ل}+\text{م}}{\text{ل}\,\text{م}}$
* $\frac{1}{\text{ل}} \times \frac{1}{\text{م}} = \frac{1}{\text{ل}\,\text{م}}$
* $\frac{\text{ل}}{\text{م}} + \frac{\text{م}}{\text{ل}} = \frac{\text{ل}^2+\text{م}^2}{\text{ل}\,\text{م}} = \frac{(\text{ل}+\text{م})^2 - 2\,\text{ل}\,\text{م}}{\text{ل}\,\text{م}}$.

مثال ③ :- إذا كان ل ، م جذرا المعادلة $\text{س}^2 - 7\text{س} + 5 = 0$. أوجد المعادلة التي جذراها ل^2 ، م^2

$\text{أ} = 1$ ، $\text{ب} = -7$ ، $\text{جـ} = 5$

الحل :- المعادلة المعطاة : * مجموع الجذرين $= \frac{-\text{ب}}{\text{أ}} \Leftarrow \text{ل}+\text{م} = 7$

* حاصل ضربهما $= \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} \Leftarrow \text{ل}\,\text{م} = 5$

المعادلة المطلوبة : * مجموع الجذرين $= \text{ل}^2 + \text{م}^2 = (\text{ل}+\text{م})^2 - 2\,\text{ل}\,\text{م} = 49 - 2\times 5 = \boxed{39}$

* حاصل ضربهما $= \text{ل}^2\,\text{م}^2 = (\text{ل}\,\text{م})^2 = \boxed{25}$

∴ المعادلة المطلوبة هي $\text{س}^2 - 39\text{س} + 25 = 0$

مثال ④ :- إذا كان ل ، م جذرا المعادلة $\text{س}^2 - 2\text{س} - 5 = 0$. أوجد المعادلة التي جذراها $\frac{1}{\text{ل}}$ ، $\frac{1}{\text{م}}$

$\text{أ} = 1$ ، $\text{ب} = -2$ ، $\text{جـ} = -5$

الحل :- المعادلة المعطاة : * مجموع الجذرين $= \frac{-\text{ب}}{\text{أ}} \Leftarrow \text{ل}+\text{م} = 2$

* حاصل ضربهما $= \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} \Leftarrow \text{ل}\,\text{م} = -5$

المعادلة المطلوبة : * مجموع الجذرين $= \frac{1}{\text{ل}} + \frac{1}{\text{م}} = \frac{\text{ل}+\text{م}}{\text{ل}\,\text{م}} = \boxed{\frac{2}{-5}}$

* حاصل ضربهما $= \frac{1}{\text{ل}} \times \frac{1}{\text{م}} = \frac{1}{\text{ل}\,\text{م}} = \boxed{\frac{1}{-5}}$

∴ المعادلة المطلوبة هي $\text{س}^2 + \frac{2}{5}\text{س} - \frac{1}{5} = 0$

مثال ⑤ :- إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $2س^2 - 3س - 1 = 0$ كون المعادلة التربيعية التي جذراها

(1) $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$ (3) $ل + \frac{1}{م}$ ، $م + \frac{1}{ل}$

(2) ل + م ، ل م

الحل :-

أ = 2 ، ب = -3 ، جـ = -1

المعادلة المعطاة : * مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ ⟸ $ل + م = \frac{3}{2}$

* حاصل ضربهما = $\frac{جـ}{أ}$ ⟸ $ل م = \frac{-1}{2}$

← (1) المعادلة المطلوبة : * مجموع الجذرين = $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{(ل+م)^2 - 2ل م}{ل م} = \frac{\frac{9}{4} - 2 \times \frac{-1}{2}}{\frac{-1}{2}}$

$= \boxed{\frac{-13}{2}}$

* حاصل ضربهما = $\frac{ل}{م} \times \frac{م}{ل} = \frac{ل م}{ل م} = \boxed{1}$

∴ المعادلة المطلوبة هي $س^2 + \frac{13}{2}س + 1 = 0$ #

← (2) المعادلة المطلوبة : * مجموع الجذرين = $(ل+م) + (ل م) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{1}$

* حاصل ضربهما = $(ل+م)(ل م) = \frac{3}{2} \times \frac{-1}{2} = \boxed{\frac{-3}{4}}$

∴ المعادلة المطلوبة هي $س^2 - س - \frac{3}{4} = 0$ #

← (3) المعادلة المطلوبة : * مجموع الجذرين = $ل + \frac{1}{م} + م + \frac{1}{ل} = (ل+م) + (\frac{1}{م} + \frac{1}{ل})$

$= (ل+م) + (\frac{ل+م}{ل م}) = \frac{3}{2} + (\frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}}) = \boxed{\frac{-3}{2}}$

* حاصل ضربهما = $(ل + \frac{1}{م})(م + \frac{1}{ل}) = ل م + 2 + \frac{1}{ل م}$

$= \frac{-1}{2} + 2 + \frac{1}{\frac{-1}{2}} = \boxed{\frac{-1}{2}}$

∴ المعادلة المطلوبة هي $س^2 + \frac{3}{2}س - \frac{1}{2} = 0$ #

---

* **تدريب** * (1) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^2 + 3س - 5 = 0$ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $ل^2$ ، $م^2$

(2) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $3س^2 + 5س - 7 = 0$ كون المعادلة التربيعية التي جذراها :- (1) $\frac{1}{ل}$ ، $\frac{1}{م}$ ، (2) $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$

مثال ⑥ :- إذا كان ل+٣ ، م+٣ هما جذري المعادلة س^{2} - ١١س + ٧ = ٠

كون المعادلة التي جذراها ل ، م

الحل :- المعادلة المعطاة: * مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ ⟸ ل+٣+م+٣ = ١١ ⟸ ل+م+٦ = ١١

⟸ ل+م = ٥ ← ①

* حاصل ضربهم = $\frac{جـ}{أ}$ ⟸ (ل+٣)(م+٣) = ٧

⟸ لم + ٣ل + ٣م + ٩ = ٧ ⟸ لم + ٣(ل+م) = -٢

من ① ⟸ لم + ٣×٥ = -٢ ⟸ لم + ١٥ = -٢ ⟸ لم = -١٧

∴ المعادلة المطلوبة التي جذراها ل ، م هي س^{2} - (ل+م)س + لم = ٠

⟸ س^{2} - ٥س - ١٧ = ٠

---

* تدريب * إذا كان $\frac{1}{ل}$ ، $\frac{1}{م}$ هما جذرا المعادلة س^{2} - ٦س + ٤ = ٠

كون المعادلة التي جذراها ل ، م

مثال ⑦ :- إذا كان الفرق بين جذري المعادلة س^{2} - ك س + ٤ك = ٠ يساوي ثلاثة أمثال حاصل ضرب جذري المعادلة س^{2} - ٣س - ك = ٠ أوجد قيمة ك

الحل :- نفرض أن جذري المعادلة س^{2} - ك س + ٤ك = ٠ هما ل ، م (أ = ١ ، ب = -ك ، جـ = ٤ك)

∴ ل + م = ك ، لم = ٤ك ← ①

∴ الفرق بين ل ، م يساوي ثلاثة أمثال حاصل ضرب جذري المعادلة س^{2} - ٣س - ك = ٠ (أ = ١ ، ب = -٣ ، جـ = -ك)

⟸ ل - م = -٣ك ← ②

∵ (ل-م)^{2} = (ل+م)^{2} - ٤لم ⟸ من ① ، ② ⟸ (-٣ك)^{2} = ك^{2} - ١٦ك

⟸ ٩ك^{2} = ك^{2} - ١٦ك ⟸ ٨ك^{2} = -١٦ك ⟸ ٨ك^{2} + ١٦ك = ٠ ⟸ ٨ك(ك+٢) = ٠

إما ٨ك = ٠ ⟸ ك = ٠ أو ك + ٢ = ٠ ⟸ ك = -٢

مثال ⑧ أوجد المعادلة التربيعية التي جذراها ضعف جذري المعادلة التربيعية

٢س^2 - ٨س + ٥ = ٠

الحل :- نفرض جذري المعادلة المعطاة هما ل ، م

أ = ٢
ب = -٨
ج = ٥

⇐ ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ ⇐ ل + م = $\frac{٨}{٢}$ = ٤

⇐ ل م = $\frac{ج}{أ}$ ⇐ ل م = $\frac{٥}{٢}$

∵ المعادلة المطلوبة جذراها ضعف جذري المعادلة المعطاة ∴ جذراها هم ٢ل ، ٢م

⇐ مجموع الجذرين = ٢ل + ٢م = ٢(ل + م) = ٢ × ٤ = ⑧

⇐ حاصل ضربهم = ٢ل × ٢م = ٤ ل م = ٤ × $\frac{٥}{٢}$ = ⑩

∴ المعادلة المطلوبة هي س^2 - ٨س + ١٠ = ٠ #

مثال ⑨ :- أوجد المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يزيد بمقدار ١ عن كل من جذري المعادلة س^2 - ٧س + ٩ = ٠

الحل :- نفرض جذري المعادلة المعطاه هما ل ، م

أ = ١
ب = -٧
ج = ٩

⇐ ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ ⇐ ل + م = ٧

⇐ ل م = $\frac{ج}{أ}$ ⇐ ل م = ٩

∵ المعادلة المطلوبة جذراها يزيد بمقدار ١ عن جذري المعادلة المعطاه

∴ جذري المعادلة المطلوبة هما ل + ١ ، م + ١

⇐ مجموع الجذرين = ل + ١ + م + ١ = ل + م + ٢ = ٧ + ٢ = ⑨

⇐ حاصل ضربهم = (ل + ١)(م + ١) = ل م + ل + م + ١ = ٩ + ٧ + ١ = ⑰

∴ المعادلة المطلوبة هي س^2 - ٨س + ١٠ = ٠ #

تمارين على "تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها"

[1] أكمل ما يأتي :-

(١) المعادلة التي جذراها ٣ ، -٥ هي ....

(٢) المعادلة التي جذراها $\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$ هي ....

(٣) المعادلة التي مجموع جذريها = ٣ وحاصل ضربهما = -٥ هي ....

(٤) إذا كان ل ، $ل^٢$ هما جذرا المعادلة ب$س^٢$ - س + ٤٥ = ٠ فإن ب = ...

(٥) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^٢$ - ٥س + ٤ = ٠ فإن ل + م = ... ، ل م = ... ، $ل^٢ + م^٢$ = ...

[2] كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها :-

(١) -٢ ، ٤

(٢) $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٥}{٢}$

(٣) -٥ت ، ٥ت

(٤) ١-٣ت ، ١+٣ت

(٥) ٣-٢$\sqrt{٢}$ ت ، ٣+٢$\sqrt{٢}$ ت

(٦) $\frac{٣}{ت}$ ، $\frac{٣+٣ت}{١-ت}$

[3]

(١) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^٢$ + ٥س - ٣ = ٠ . كوّن المعادلة التي جذراها $ل^٢$ ، $م^٢$

(٢) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^٢$ - ١٣س + ١٠ = ٠ . كوّن المعادلة التي جذراها ل + ٢ ، م + ٢

(٣) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^٢$ + ٢س + ٦ = ٠ . كوّن المعادلة التي جذراها ل - ١ ، م - ١

(٤) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^٢$ + ٣س + ٤ = ٠ . كوّن المعادلة التي جذراها $\frac{ل}{٢}$ ، $\frac{م}{٢}$

(٥) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^٢$ - س + ٣ = ٠ . كوّن المعادلة التي جذراها $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$

(٦) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة ٢$س^٢$ - ٦س + ٣ = ٠ . كوّن المعادلة التي جذراها $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$

(٧) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^٢$ + ٣س - ١ = ٠ . كوّن المعادلة التي جذراها $\frac{١}{ل^٢}$ ، $\frac{١}{م^٢}$

(٨) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^٢$ = ٣ - ٧س كوّن المعادلة التي جذراها $\frac{ل^٣}{م}$ ، $\frac{م^٣}{ل}$

(٩) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^٢$ - ٧س + ٣ = ٠ . كوّن المعادلة التي جذراها ٢ل ، ٢م

(١٠) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^٢$ - ٢س - ٨ = ٠ . كوّن المعادلة التي جذراها ٣ل - م ، ٣م - ل

(١١) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^٢$ + ٣س = ٧ كوّن المعادلة التي جذراها ١ - ل ، ١ - م

(١٢) إذا كان ل + ٢ ، م + ٢ هما جذرا المعادلة س^{2} − ١١س + ٣ = ٠ . كون المعادلة التي جذراها ل ، م

(١٣) إذا كان ل − ١ ، م − ١ هما جذرا المعادلة س^{2} + ٥س + ٧ = ٠ . كون المعادلة التي جذراها ل + م ، م + ٢

٤ كون المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يساوي نصف نظيره من جذري المعادلة
٢س^{2} − ١٢س + ٧ = ٠ .

٥ كون المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يساوي مربع نظيره من جذري المعادلة
س^{2} + ٣س − ٥ = ٠ .

٦ إذا كان الفرق بين جذري المعادلة التربيعية س^{2} + ك س + ٢ك = ٠
يساوي ضعف حاصل ضرب جذري المعادلة س^{2} + ٣س + ك = ٠ . أوجد قيمة ك .

٧ إذا كان ل ، م جذرا المعادلة س^{2} − ٧س + ٣د = ٠ . وكان (ل + ١) ، (م + ١)
هما جذرا المعادلة س^{2} − جـ س + ٥د = ٠ . أوجد قيمة كل من جـ ، د
ثم كون المعادلة التي جذراها (ل + م) ، (ل^{2} + م^{2})

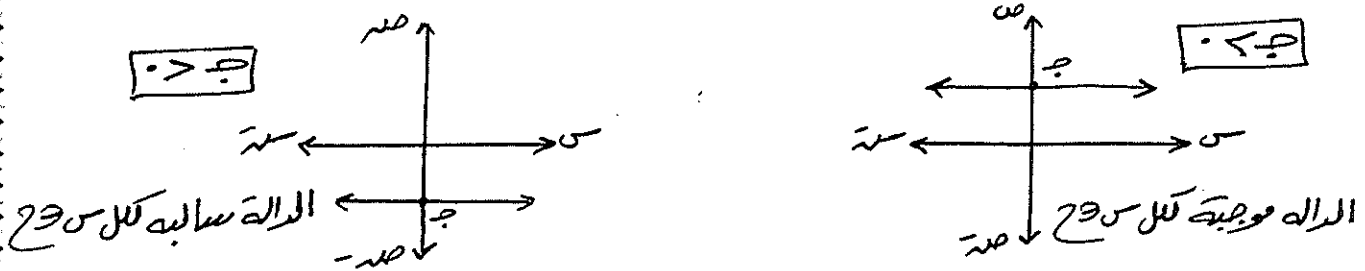
٨ إذا كان ل − ١ ، م هما جذرا المعادلة س^{2} − ٣س − ٧ = ٠ .
أوجد المعادلة التي جذراها ل ، ٣م + ١ .

---

(٦) " إشارة الدالة "

* المقصود ببحث إشارة الدالة هو معرفة الفترات التي تكون فيها الدالة موجبة والفترات التي تكون فيها الدالة سالبة والفترات التي تكون فيها الدالة تساوي صفر.

أولاً :- " إشارة الدالة الثابتة "

إشارة الدالة الثابتة د حيث د(س) = جـ ، جـ ثابت ≠ ٠ هي نفس إشارة جـ لكل س ∈ ح

مثال (١) ابحث إشارة كل من الدوال الآتية :-

(١) د(س) = ٣ (٢) د(س) = -٥

الحل :- (١) د(س) = ٣ > ٠ ∴ إشارة د(س) موجبة لكل س ∈ ح .

(٢) د(س) = -٥ < ٠ ∴ إشارة د(س) سالبة لكل س ∈ ح .

ثانياً :- " إشارة الدالة الخطية "

قاعدة الدالة الخطية هي د(س) = ب س + جـ ، ب ≠ ٠

بوضع د(س) = ٠ ⟸ ب س + جـ = ٠ ⟸ ب س = - جـ ⟸ (÷ ب) س = $\frac{-جـ}{ب}$

وتكون إشارة الدالة :- • د(س) مثل إشارة معامل س عندما س > $\frac{-جـ}{ب}$ أي س ∈] $\frac{-جـ}{ب}$ ، ∞ [

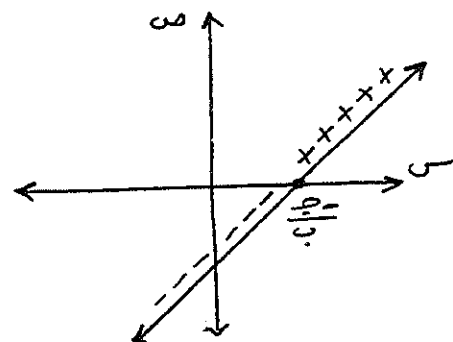
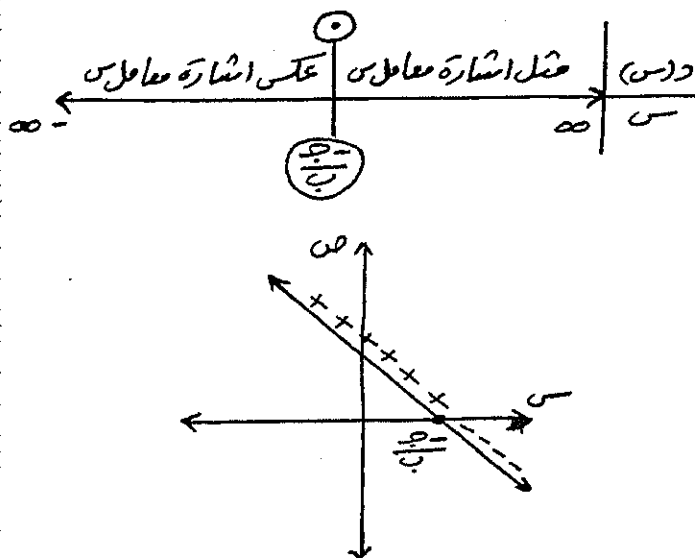
• د(س) عكس إشارة معامل س عندما س < $\frac{-جـ}{ب}$ أي س ∈] -∞ ، $\frac{-جـ}{ب}$ [

• د(س) = ٠ عندما س = $\frac{-جـ}{ب}$ أي س ∈ { $\frac{-جـ}{ب}$ }

ويمكن أن نعبر عنها كما يلي :-

د(س)	مثل اشارة معامل س	٠	عكس اشارة معامل س
س ∞		$\frac{-ج}{ب}$	-∞

والشكل التالي يوضح ذلك بيانياً :-

مثال ② ابحث إشارة كل من الدوال الآتية :-

(١) د(س) = س + ١ (٢) د(س) = ٤ - ٣س

الحل :- (١) ∵ د(س) = س + ١ بوضع د(س) = ٠

⇐ س + ١ = ٠ ⇐ س = -١

∴ د(س) تكون موجبة (مثل إشارة معامل س) عندما س > -١ أي س ∈]-١ ، ∞[

د(س) سالبة (عكس اشارة معامل س) عندما س < -١ أي س ∈]-∞ ، -١[

د(س) = ٠ عندما س = -١ أي س ∈ {-١}

د(س)	+ + + + + + +	٠	- - - - - - - -
س ∞		-١	-∞

---

(٢) ∵ د(س) = ٤ - ٣س ← بوضع د(س) = ٠ ⇐ ٤ - ٣س = ٠ ⇐ س = $\frac{٤}{٣}$

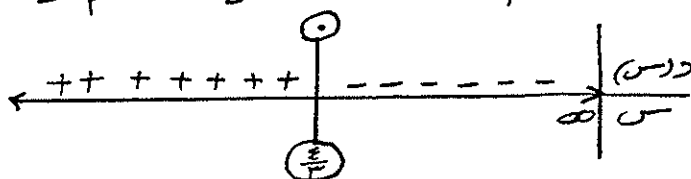
∴ د(س) سالبة (مثل إشارة معامل س) عندما س > $\frac{٤}{٣}$ أي س ∈]$\frac{٤}{٣}$ ، ∞[

د(س) موجبة (عكس إشارة معامل س) عندما س < $\frac{٤}{٣}$ أي س ∈]-∞ ، $\frac{٤}{٣}$[

د(س) = ٠ عندما س = $\frac{٤}{٣}$

د(س)	- - - - - - - -	٠	+ + + + + + + +
س ∞		$\frac{٤}{٣}$	

تدريب ابحث إشارة كل من الدوال الآتية :-

(١) د(س) = س - ٣ (٢) د(س) = ١ - ٢ س

ثالثاً :- "إشارة الدالة التربيعية"

لتعيين إشارة الدالة التربيعية د(س) = أ س^٢ + ب س + جـ ، أ ≠ ٠ .

نوجد مميز المعادلة أ س^٢ + ب س + جـ = ٠ وهو ب^٢ - ٤ أ جـ فإذا كان :-

← (١) ب^٢ - ٤ أ جـ > ٠ فإنه يكون للمعادلة جذران حقيقيان ولنفرض أنهما ل ، م ، ل < م وتكون إشارة الدالة كما يلي :-

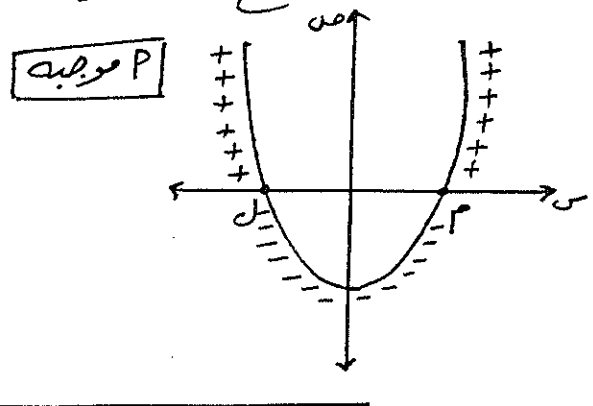
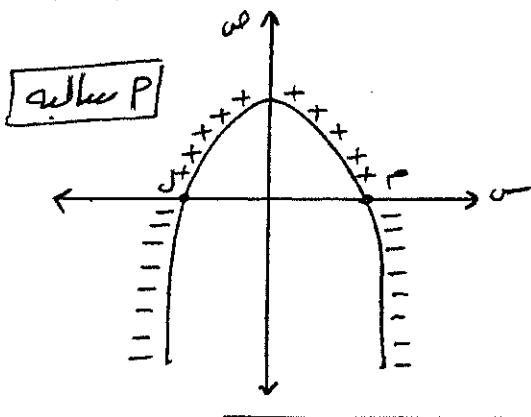
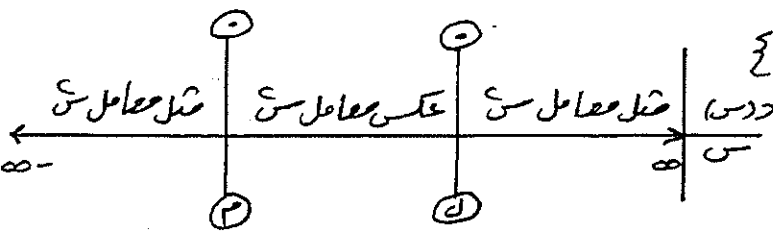
• د(س) مثل إشارة معامل س^٢ عندما س ∈ ح - [ل ، م]

• د(س) عكس إشارة معامل س^٢ عندما س ∈]ل ، م[

• د(س) = ٠ عندما س ∈ {ل ، م}

ويمكن أن نعبر عنها كما يلي :-

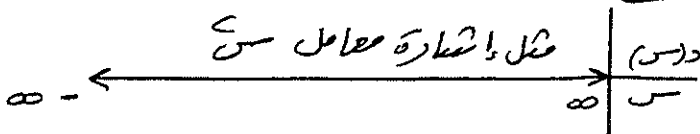
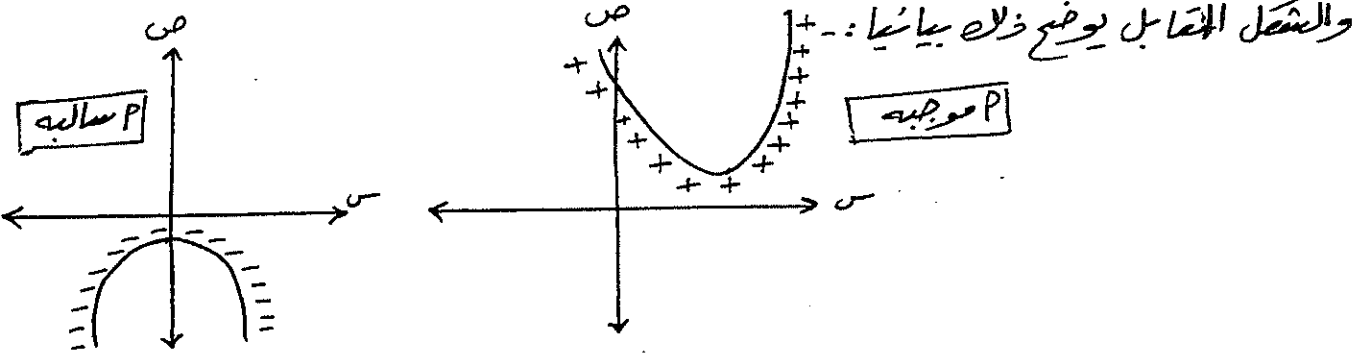
د(س)	مثل معامل س^٢	ل (٠)	عكس معامل س^٢	م (٠)	مثل معامل س^٢
س	∞				-∞

والشكل المقابل يوضح ذلك بيانياً :-

← (٢) ب^٢ - ٤ أ جـ < ٠ فإنه لا توجد جذور حقيقية للمعادلة وتكون إشارة الدالة كما يلي :-

• د(س) مثل إشارة معامل س^٢ لكل س ∈ ح

ويمكن أن نعبر عنها كما يلي :-

د(س)	مثل إشارة معامل س^٢
س	∞ -∞

والشكل المقابل يوضح ذلك بيانياً :-

(٣) $ب^2 - 4أج = 0$ فإنه يكون للمعادلة جذران متساويان ولنفرض أن كل منهما يساوي ل

وبالتالي تكون إشارة الدالة كما يلي :-

- د(س) مثل إشارة معامل $س^2$ عندما $س \in ح - \{ل\}$ أي $س \neq ل$
- د(س) = ٠ عندما $س \in \{ل\}$ أي س = ل

ويمكن أن نعبر عنها كما يلي :-

د(س) | مثل معامل $س^2$ | ٠ | مثل معامل $س^2$
س | ∞ | ل | $-\infty$

والشكل المقابل يوضح ذلك بيانياً :-

مثال ② عين إشارة كل من الدوال الآتية :-

(١) $د(س) = س^2 - 5س + 4$ ③ $د(س) = س^2 - 8س + 16$

(٢) $د(س) = س^2$ س $+ 1$

الحل :- (١) $د(س) = س^2 - 5س + 4$

أ = ١ ، ب = -٥ ، ج = ٤

$\because ب^2 - 4أج = 25 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9 > 0$

$\therefore$ الجذران حقيقيان مختلفان ← نوجدهما وذلك بوضع د(س) = ٠

⇐ $س^2 - ٥س + ٤ = ٠$ ⇐ $(س - ٤)(س - ١) = ٠$ ⇐ $\boxed{س = ٤}$ أو $\boxed{س = ١}$

∴ د(س) تكون موجبة (شكل) عندما س ∈ ح - [١ ، ٤]

د(س) تكون سالبة (عكس) عندما س ∈] ١ ، ٤ [

د(س) = ٠ عندما س ∈ { ١ ، ٤ }

وتكون تمثيلها على خط الأعداد ←

د(س): + + + + + (٤) − − − − − (١) + + + + +

---

(٢) د(س) = $س^2 - س + ١$

أ = ١ ، ب = −١ ، جـ = ١

∵ $ب^2 - ٤ أ جـ = ١ - ٤ × ١ × ١ = ١ - ٤ = -٣ < ٠$

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية

∴ د(س) تكون موجبة لكل س ∈ ح

د(س): + + + + + + + + + +

---

(٣) د(س) = $س^2 - ٨س + ١٦$

أ = ١ ، ب = −٨ ، جـ = ١٦

∵ $ب^2 - ٤ أ جـ = ٦٤ - ٤ × ١ × ١٦ = ٦٤ - ٦٤ =$ صفر

∴ المعادلة لها جذران حقيقيان متساويان نوجدهما وذلك بوضع د(س) = ٠

⇐ $س^2 - ٨س + ١٦ = ٠$ ⇐ $(س - ٤)(س - ٤) = ٠$ ⇐ $\boxed{س = ٤}$

∴ د(س) تكون موجبة عندما س ∈ ح - {٤} أي س ≠ ٤

د(س) = ٠ عندما س = ٤ .

د(س): + + + + + + + (٤) + + + + + +

---

* تدريب * ابحث إشارة كل من الدوال الآتية :-

(١) $س^2 - ٣س - ١٠ =$ د(س)

(٢) د(س) = $٢س - س^2 - ٣$

(٣) د(س) = $١٠س - س^2 - ٥$

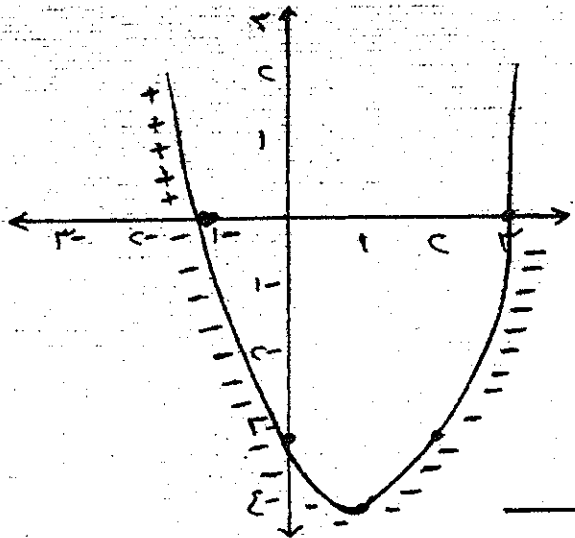
مثال ④ :- مثل بيانياً د حيث د(س) = س² − ٢س − ٣ ثم عين من الرسم إشارة الدالة

الحل :- يمكن إيجاد نقطة رأس المنحنى طالما لا يوجد فترة للتعويض فيها

الاحداثي السيني = −ب / ٢أ = ٢ / (١×٢) = ١

الاحداثي الصادي = د(−ب / ٢أ) = د(١) = ١² − ٢×١ − ٣ = ١ − ٢ − ٣ = −٤

∴ نقطة رأس المنحنى هي (١ ، −٤) نكون عمل جدول كما يلي .

س	−١	٠	①	٢	٣
د(س)	٠	−٣	④−	−٣	٠

من الرسم نلاحظ أن :-

د(س) موجبة عندما س ∈ ح − [−١ ، ٣]

د(س) سالبة عندما س ∈]−١ ، ٣[

د(س) = ٠ عندما س ∈ {−١ ، ٣}

مثال ⑤ :- اثبت أنه لجميع قيم س ∈ ح يكون جذرا المعادلة ٢س² − ل س + ل − ٣ = ٠ حقيقيين مختلفين .

الحل :- يكون للمعادلة جذرين حقيقيين مختلفين إذا كان المميز = ب² − ٤أجـ > ٠

أ = ٢ ، ب = −ل ، جـ = ل − ٣

∴ ب² − ٤أجـ = ل² − ٤×٢×(ل − ٣) = ل² − ٨(ل − ٣)

= ل² − ٨ل + ٢٤ = (ل² − ٨ل + ١٦) + ٨

= (ل − ٤)² + ٨ وهذا المقدار موجب دائماً

∴ ب² − ٤أجـ > ٠ ∴ المعادلة لها جذران حقيقيان مختلفان

---

* **تدريب** * اثبت أنه لجميع قيم س ∈ ح يكون جذرا المعادلة س² + ٢ل س + ل − ٢ = ٠ حقيقيين مختلفين .

تمارين على " إشارة الدالة "

[1] أكمل ما يأتي :-

(١) الدالة د(س) = -٥ إشارتها ..... في ....

(٢) الدالة د(س) = س - ٢ موجبة في الفترة ...... وسالبة في الفترة ....

(٣) الدالة د(س) = ٣ - س موجبة في الفترة .... وسالبة في الفترة ....

(٤) الدالة د(س) = س٢ - ٦س + ٩ موجبة في الفترة ....

(٥) الدالة د(س) = -(س - ١)(س + ٢) موجبة في الفترة .....

(٦) الدالة د(س) = (٣ - س)٢ تكون موجبة لجميع قيم س ماعدا ......

(٧) الداله د(س) = -س تكون موجبة في الفترة ......

(٨) من الشكل المقابل :- دالة من الدرجة الأولى

د(س) موجبة في الفترة ..... وسالبة في الفترة ....

(٩) من الشكل المقابل :- دالة من الدرجة الثانية

د(س) = ٠ عندما س ∈ .....

د(س) > ٠ عندما س ∈ ......

د(س) < ٠ عندما س ∈ .....

[2] ابحث إشارة كل من الدوال الآتية :-

(١) د(س) = ٢ (٥) د(س) = ٤ - س (٩) د(س) = ٢س٢

(٢) د(س) = ٢س (٦) د(س) = -٣ - ½س (١٠) د(س) = (س - ٢)(س + ٣)

(٣) د(س) = -٣س (٧) د(س) = س٢ - ٨س + ١٦ (١١) د(س) = (٢س - ٣)٢

(٤) د(س) = ٢س - ٣ (٨) د(س) = ١٠س - ٢٥ - ٤س٢ (١٢) د(س) = ١ - س٢

[3] (١) ارسم منحنى الدالة د(س) = س٢ - ٩ في الفترة [-٣ ، ٤] ومن الرسم ابحث إشارة الدالة

(٢) ارسم منحنى الدالة د(س) = س^٢ + ٢س + ٢ في الفترة [-٣، ٥] وابحث إشارتها

٤ إذا كانت د(س) = س^٢ - ٩ ، ر(س) = س - ١ . أوجد الفترات التي تكون فيها د ، ر لهما نفس الإشارة

٥ إذا كانت د(س) = س + ١ ، ر(س) = ١ - س^٢ عيّن الفترات التي تكون فيها الدالتان موجبتين معًا .

٦ إذا كانت د(س) = س - ٣ ، ر(س) = س^٢ - ٥س - ٦
وكانت هـ(س) = د(س) • ر(س) . ابحث إشارة هـ(س)

٧ اثبت أنه لجميع قيم ك ∈ ح يكون جذرا المعادلة س^٢ + ٢ك س + ك - ٢ = ٠
حقيقيين مختلفين .

٨ في الفترة من عام ١٩٩٠ إلى ٢٠١٠ كان إنتاج أحد مناجم الذهب مقدرًا بالألف أوقية يتحدد بالدالة د(ن) = ١٢ن^٢ - ٩٦ن + ٤١٠ حيث ن عدد السنوات ، د(ن) إنتاج الذهب .

أولاً :- ابحث إشارة دالة الإنتاج د .

ثانيًا :- خلال الأعوام من ١٩٩٠ إلى ٢٠١٠ في أي الأعوام كان إنتاج الذهب يتناقص ؟

ثالثًا :- خلال الأعوام من ١٩٩٠ إلى ٢٠١٠ في أي الأعوام كان إنتاج الذهب يتزايد ؟

(٧) "متباينة الدرجة الثانية في مجهول واحد"

* نعلم أن حل متباينة الدرجة الأولى في مجهول واحد يعني أن نوجد جميع قيم المجهول الذي يحقق هذه المتباينة في صورة فترة .

* حل المتباينة التربيعية :- يعني ايجاد جميع قيم المجهول التي تحقق هذه المتباينة

⇐ **خطوات حل متباينة الدرجة الثانية في مجهول واحد :-**

(١) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بهذه المتباينة .

(٢) ندرس إشارة الدالة التربيعية ونضعها على خط الأعداد .

(٣) نحدد الفترات التي تحقق المتباينة .

مثال ① :- حل المتباينة س^2 - س - ٦ > ٠ .

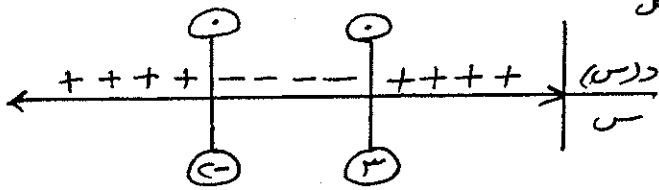
الحل :- الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة هي د(س) = س^2 - س - ٦

نبحث إشارة هذه الدالة كما سبق شرحه في الدرس السابق

نضع د(س) = ٠ ⇐ س^2 - س - ٦ = ٠ (س - ٣)(س + ٢) = ٠

ومنها س = ٣ ، س = -٢ ونلاحظ أن الجذرين حقيقيين مختلفين

∴ د(س) تكون إشارتها كما يلي في الشكل

د(س) : + + + + | - - - - | + + + +
س : -٢ ، ٣

من الرسم :-

مجموعة حل المتباينة = ح - [-٢ ، ٣]

أو]-∞ ، -٢[∪]٣ ، ∞[وهذه الفترة هي التي تحقق

مثال ② حل المتباينة (س - ١)^2 ≥ ٥ - ٤(س - ١)

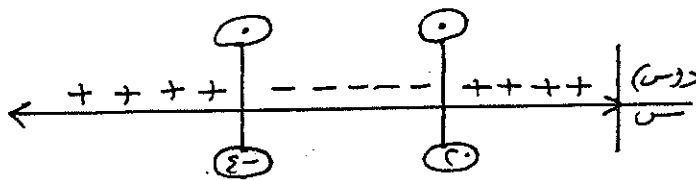
الحل :- (س - ١)^2 ≥ ٥ - ٤(س - ١) ⇐ س^2 - ٢س + ١ ≥ ٥ - ٤س + ٤

∴ $س^2 - ٢س + ١ \leq ٩ - ٤س \Leftarrow س^2 + ٢س - ٨ \leq ٠$

∴ الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة هي $د(س) = س^2 + ٢س - ٨$

∵ $ب^2 - ٤أجـ = ٤ - ٤ \times ١ \times -٨ = ٤ + ٣٢ = ٣٦ > ٠$ "الجذران حقيقيان مختلفان"

بوضع $د(س) = ٠ \Leftarrow س^2 + ٢س - ٨ = ٠$ $\quad (س + ٤)(س - ٢) = ٠$

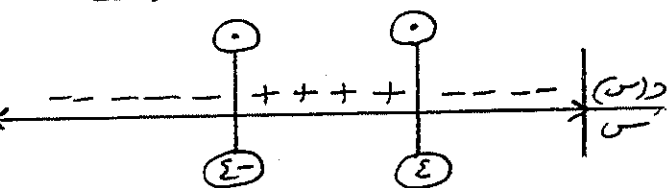
ومنها $س = -٤$ ، $س = ٢$

∴ د(س) تكون إشارتها كما يلي في الشكل

∴ مجموعة حل المتباينة = $[-٤ ، ٢]$

مثال ③ :- حل المتباينة $١٦ - س^2 > ٠$

الحل :- الدالة المرتبطة بالمتباينة هي $د(س) = ١٦ - س^2$

بوضع $د(س) = ٠ \Leftarrow ١٦ - س^2 = ٠ \overset{\times -١}{\Leftarrow} س^2 - ١٦ = ٠$ $\quad (س - ٤)(س + ٤) = ٠$

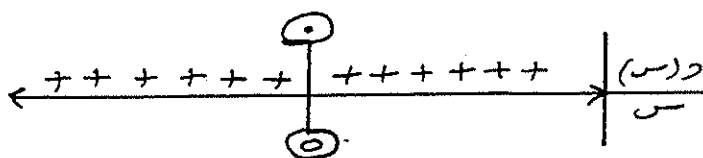
ومنها $س = ٤$ ، $س = -٤$

∴ د(س) تكون إشارتها كما يلي بالشكل

∴ مجموعة حل المتباينة = $]-٤ ، ٤[$

مثال ④ حل المتباينة $-٢٥ - س^2 + ١٠س < ٠$

الحل :- ∴ $-٢٥ - س^2 + ١٠س < ٠ \overset{\times -١}{\Leftarrow} س^2 - ١٠س + ٢٥ > ٠$

∴ الدالة التربيعية هي $د(س) = س^2 - ١٠س + ٢٥ = ٠$ $\quad (س - ٥)(س - ٥) = ٠$

ومنها $س = ٥$

∴ د(س) تكون إشارتها كما بالشكل

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − {٥}

مثال ⑤ :- حل المتباينة $س^{٢} + ٤ > ٠$

الحل :- الدالة التربيعية هي $د(س) = س^{٢} + ٤$

$\because ب^{٢} - ٤ أ جـ = ٠ - ٤ \times ١ \times ٤ = -١٦ < ٠$ الجذران غير حقيقيان

$\therefore$ د(س) تكون إشارتها كما بالشكل

د(س) / س : + + + + + + + + + + +

$\therefore$ مجموعة حل المتباينة = ح

فكر ما التعديل الذي يجب فعله في المتباينة السابقة حتى تصبح م.ح = ϕ ؟

تمارين على " متباينة الدرجة الثانية في مجهول واحد "

◻ حل المتباينات الآتية

(١) $س^{٢} + ٢س - ٨ > ٠$

(٢) $س^{٢} - ١ \leq ٠$

(٣) $٧ + س^{٢} - ٤س < ٠$

(٤) $س^{٢} - ٤س + ٤ \geq ٠$

(٥) $٢س - س^{٢} < ٠$

(٦) $س^{٢} \leq ٩$

(٧) $٣س^{٢} \leq ١١س + ٤$

(٨) $٣ - ٢س \geq س^{٢}$

(٩) $س^{٢} + ٥ \leq ١$

(١٠) $س(س + ٢) - ٣ \leq ٠$

(١١) $(س + ٣)^{٢} < ١٠ - ٣(س + ٣)$

(١١) $٥ - ٢س \leq س^{٢}$

(١٢) $٥س^{٢} + ١٢س \geq ٤٤$

(١٣) $س^{٢} \geq ٦س - ٩$

(١٤) $(س - ٢)^{٢} \leq -٥$

(١٥) $(س + ١)^{٢} < ٤(٢س - ١)^{٢}$

تمارين عامة

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) مجموعة حل المعادلة س² − ٦ س + ٩ = ٠ في ح هي : ....

أ {−٣} ب {٣} ج {−٣، ٣} د ϕ

(٢) مجموعة حل المعادلة س² + ٤ = ٠ هي : ....

أ {−٢} ب {٢} ج {−٢، ٢} د {−٢ت، ٢ت}

(٣) أبسط صورة للمقدار (١ − ت)⁴ هو : ....

أ −٤ ب ٤ ج −٤ ت د ٤ ت

(٤) إذا كان جذرا المعادلة س² − ٤س + ك = ٠ حقيقيين ومختلفين فإن: ....

أ ك > ٤ ب ك < ٤ ج ك = ٤ د ك ⩽ ٤

(٥) إذا كان جذرا المعادلة س² − ١٢س + م = ٠ متساويين فإن م تساوى: ....

أ −٣٦ ب −٦ ج ٦ د ٣٦

(٦) المعادلة التربيعية التى جذراها ٢ − ٣ت ، ٢ + ٣ت هى : ....

أ س² + ٤س + ١٣ = ٠ ب س² − ٤س + ١٣ = ٠ ج س² + ٤س − ١٣ = ٠ د س² − ٤س − ١٣ = ٠

(٧) إذا كانت د : [−٢ ، ٤] ⟵ ح حيث د(س) = ٢ − س فإن إشارة الدالة د سالبة فى:

أ]−٢ ، ٢[ب [−٢ ، ٢] ج [٢ ، ٤] د]٢ ، ٤]

(٨) إذا كان أحد جذرى المعادلة س² − (م + ٢) س + ٣ = ٠ معكوسًا جمعيًا للجذر الآخر فإن م تساوى:

أ −٣ ب −٢ ج ٢ د ٣

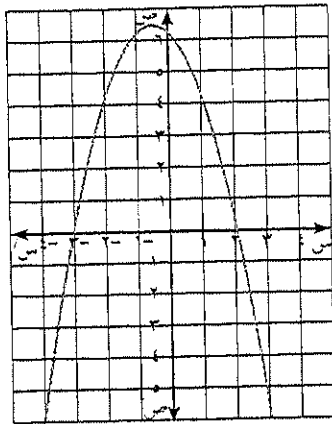
(٩) إذا كان أحد جذرى المعادلة ٢ س² + ٧ س + ك = ٠ هو المعكوس الضربى للجذر الآخر فإن ك تساوى:

أ −٧ ب −٢ ج ٢ د ٧

(١٠) مجموعة حل المتباينة س² + س − ٢ < ٠ هى :

أ]−٢ ، ١[ب [−٢ ، ١] ج ح − [−٢ ، ١] د ح −]−٢ ، ١[

ثانيًا: يمثل الشكل المقابل التمثيل البيانى لدالة تربيعية د

(١١) أكمل مايأتى :

أ مدى الدالة د هو ....

ب القيمة العظمى للدالة د = ...

ج نوع جذرى المعادلة د (س) = ٠ ....

د مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ هى ....

هـ د(س) > ٠ عندما س ∈ ....

و د(س) < ٠ عندما س ∈ ....

ز د(س) = ٠ عندما س = ...

تمارين عامة

١٢ اكتب قاعدة الدالة التى تمر بالنقاط (-٣، ٠) ، (٢، ٠) ، (٢، ١)

....

١٣ تفكير ناقد :

أ اكتب نقاط تقاطع منحنى الدوال التى قاعدتها ص = س^{٢} ، ص = س

....

ب اكتب نقاط تقاطع منحنى الدوال التى قاعدتها ص = - س^{٢}، ص = - س ماذا تلاحظ ؟ فسر إجابتك.

....

ثالثاً: أجب عن الأسئلة الآتية

١٤ بين نوع جذرى كل معادلة مما يأتى، ثم أوجد مجموعة حل كل معادلة.

أ س^{٢} - ٢س = ٠ ب (س - ١)^{٢} = ٤ جـ س^{٢} - ٦ س + ٩ = ٠

د س^{٢} + ٣س - ٢٨ = ٠ هـ ٦س (س - ١) = ٦ - س

١٥ حل المعادلات الآتية باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

أ س^{٢} + ٤س + ٢ = ٠ ب س^{٢} - ٣(س - ٢) = ٥

١٦ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية فى مجموعة الأعداد المركبة .

أ س^{٢} + ٩ = ٠ ب س^{٢} + ٢س + ٢ = ٠ جـ س^{٢} + ٤س + ٥ = ٠

١٧ أوجد قيمة أ، ب فى كل مما يأتى :

أ (٧ - ٣ت) - (٢ + ت) = أ + ب ت ب (٢ - ٥ت)(٣ + ت) = أ + ب ت

جـ $\frac{١٠}{٢ + ت}$ = أ + ب ت د $\frac{٦ - ٤ت}{١ - ت}$ = أ + ب ت

١٨ أوجد قيمة م فى كل مما يأتى :

أ إذا كان جذرا المعادلة ٢س^{٢} + م س + ١٨ = ٠ متساويين ....

ب إذا كان أحد جذرى المعادلة س^{٢} + ٣ س + ك = ٠ ضعف الجذر الآخر ....

١٩ ابحث إشارة الدالة د فى كل مما يأتى :

أ د(س) = س^{٢} - ٢ س - ٨ ب د(س) = ٤ - ٣س - س^{٢}

٢٠ أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

أ س^{٢} - س - ١٢ > ٠ ب س^{٢} - ٧س + ١٠ ≥ ٠

اختبار الوحدة

أولا: الاختيار من متعدد :

(١) مجموعة حل المعادلة $س^٢ - ٤س = -٤$ فى ح هى: ....

أ {-٢} ب {٢} جـ {-٢، ٢} د ϕ

(٢) حل المتباينة $س^٢ + ٩ > ٦س$ فى ح هى: ....

أ ح ب ح - {٣} جـ]-٣، ٣[د ح - [-٣، ٣]

(٣) جذرا المعادلة $٢س^٢ - ٥س + ٣ = ٠$ ....

أ حقيقيان متساويان ب حقيقيان مختلفان جـ مركبان د مركبان و مترافقان

(٤) المعادلة التربيعية التى جذراها (١ + ت)، (١ - ت) هى : ....

أ $س^٢ - ٢س + ٢ = ٠$ ب $س^٢ + ٢س - ٢ = ٠$ جـ $س^٢ + ٢س + ٢ = ٠$ د $س^٢ - ٢س - ٢ = ٠$

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية

(٥) إذا كان $(أ + ٣)س^٢ + (٢ - أ)$ س + ٤ = ٠ فأوجد قيمة أ فى كل من الحالات الآتية:

أ أحد جذرى المعادلة معكوس جمعى للجذر الآخر.

....

ب مجموع جذرى المعادلة يساوى ٦.

....

(٦) أ إذا كان $\frac{٢}{ل}$، $\frac{٢}{م}$ هما جذرا المعادلة $س^٢ - ٦س + ٤ = ٠$ فأوجد المعادلة التى جذراها ل، م.

....

ب ابحث إشارة الدالة د، حيث $د(س) = ٨ - ٢س - س^٢$

....

(٧) أ أثبت أن جذرى المعادلة $س^٢ + ٣ = ٥س$ حقيقيان مختلفان، ثم أوجد مجموعة حل المعادلة فى ح مقربًا الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

....

ب أوجد حل المتباينة : $س^٢ - ٥س - ١٤ \leqslant ٠$

....

(٨) تطبيقات فيزيائية: أُطلق صاروخ رأسيًا إلى أعلى بسرعة ٩٨ مترًا/ثانية، إذا كانت العلاقة بين المسافة المقطوعة ف بالمتر والزمن ن بالثانية تعطى بالعلاقة : $ف = ٩٨ ن - ٤,٩ ن^٢$ فأوجد :

أ المسافة التى يقطعها الصاروخ فى ثانيتين. ....

ب الزمن الذى يستغرقه الصاروخ حتى يقطع مسافة ٤٧٠,٤ مترًا. بما تفسر وجود إجابتين؟

اختبار تراكمي

١ أوجد قيمة ك التى تجعل للمعادلة ٣س^{٢} + ٤س + ك = ٠ جذرين :

أ حقيقيين متساويين ....

ب حقيقيين مختلفين ....

جـ مركبين ....

٢ أوجد قيمة ك التى تجعل:

أ أحد جذرى المعادلة س^{٢} − ك س + ك + ٢ = ٠ ضعف الجذر الآخر. ....

ب أحد جذرى المعادلة س^{٢} − ك س + ٨ = ٠ يزيد عن الجذر الآخر بمقدار ٢. ....

جـ أحد جذرى المعادلة س^{٢} − ك س + ٣ = ٠ يزيد عن المعكوس الضربى للجذر الآخر بمقدار ١.

٣ إذا كان ل، م جذرى المعادلة س^{٢} − ٣س + ٢ = ٠ فأوجد معادلة الدرجة الثانية التى جذراها :

أ ٣ل، ٣م ب ل + ١، م + ١ جـ $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ د ل + م، ل م

....

٤ إذا كان $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ هما جذرا المعادلة ٦س^{٢} − ٥ س + ١ = ٠ فكون المعادلة التربيعية التى جذراها ل، م.

....

٥ ارسم منحنى الدالةد، حيث د(س) = س^{٢} − ٤ فى الفترة [−٣، ٣] ومن الرسم عين إشارة د فى هذه الفترة.

٦ ارسم منحنى الدالة د، حيث د(س) = ٦ − ٥س − ٤س^{٢} فى الفترة [−٣، ٢] ومن الرسم عين إشارة د فى هذه الفترة.

٧ أوجد مجموعة الحل للمتباينات التربيعية الآتية:

أ س^{٢} + ٤ س + ٤ < ٠ ب س^{٢} − ٦ س > −٥ جـ (س − ٢)^{٢} ≤ −٩

....

د ٣ − ٢س ≤ س^{٢} هـ س^{٢} ≥ ١٠س − ٢٥ و ٢س^{٢} − ٧س ≤ ١٥

....

٨ أعمال تجارية: إذا كان عدد الوحدات المنتجة والمباعة من سلعة معينة فى الأسبوع هى س مليون وحدة وكان سعر بيع الوحدة هو ع حيث ع = ٢ − س، إذا كانت التكاليف الكلية اللازمة لإنتاج س مليون وحدة فى الأسبوع تعطى بالعلاقة ت = (٣,٠ + ٥,٠ س) مليون وحدة فأوجد :

أ دالة الإيراد الكلى (ى) ....

ب دالة الربح (ر) ....

جـ أوجد س عند مستوى ربح ٢,٠ مليون جنيه. ....

٩ إذا كانت أ = ١ + $\sqrt{٣}$ ت ، ب = −١ − ت، جـ = −٢ − $\sqrt{٣}$ + ت فأثبت أن: جـ − ب = (أ − ب)ت

الإبداع

في الرياضيات

ثانيا:

حساب المثلثات

الوحدة الثانية

١) الزاوية الموجهة

٢) القياس الستيني والقياس الدائري للزاوية

٣) الدوال المثلثية

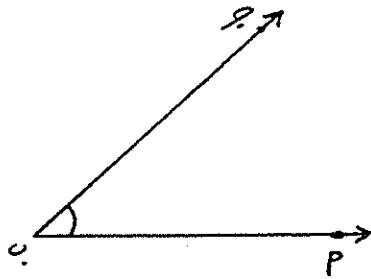
٤) الزوايا المنتسبة

٥) التمثيل البياني للدوال المثلثية

٦) إيجاد قياس زاوية بمعلومية احدي نسبها المثلثية

تمارين عامة علي الوحدة

اختبار الوحدة

(١) "الزاوية الموجهة"

نعلم أنه :- الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية .

* من الشكل المقابل :- تسمى النقطة ب رأس الزاوية

والشعاعين ب‌ا ، ب‌ج ضلعا الزاوية

أى أنه ب‌ا ∪ ب‌ج = ∠ ا ب ج . وعليه تقرأ أيضاً ∠ ج ب ا

⟸ القياس الستيني للزاوية :-

وأساسه تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوساً متساوية في الطول وعليه يكون أى زاوية مركزية يحصرها ضلعاها بنهايتى هذا القوس يكون قياسه درجة واحدة (١°)

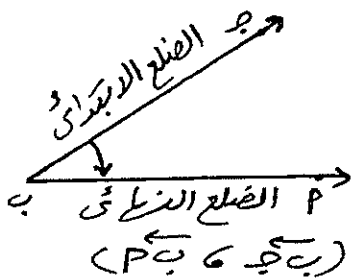
← أجزاء الدرجة هي :- الدقيقة (١َ) ، الثانية (١ً)

بحيث ١° = ٦٠َ ، ١َ = ٦٠ً

---

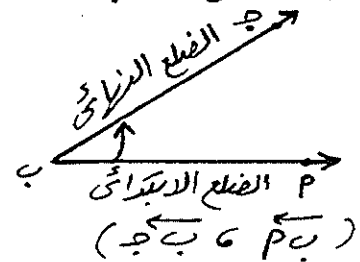
* الزاوية الموجهة :-

إذا أخذنا في الاعتبار ترتيب ضلعي الزاوية بحيث يكون إحداهما هو الضلع الإبتدائي والآخر هو الضلع النهائي في هذه الحالة تكتب الزاوية على هيئة زوج مرتب مسقطه الأول هو الضلع الابتدائي ومسقطه الثاني هو الضلع النهائي .

* من الشكل المقابل :-

(ب‌ا ، ب‌ج) — الضلع الابتدائي ب ا ، الضلع النهائي ب ج

وتقرأ ∠ ا ب ج الموجهة

(ب‌ج ، ب‌ا) — الضلع الابتدائي ب ج ، الضلع النهائي ب ا

وتقرأ ∠ ج ب ا الموجهة

لاحظ أنه : (ب‌ا ، ب‌ج) ≠ (ب‌ج ، ب‌ا) وبالتالي ∠ ا ب ج الموجهة ≠ ∠ ج ب ا الموجهة

* **تعريف :-** الزاوية الموجهة :- هي زوج مرتب من اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية حيث يسمى الشعاعين ضلعي الزاوية ، نقطة البداية هي رأس الزاوية .

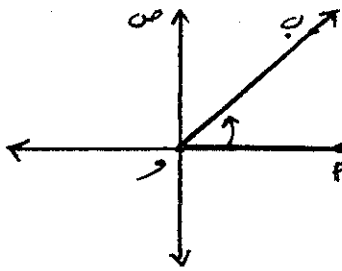
---

* **الوضع القياسي للزاوية الموجهة :-** تكون الزاوية الموجهة في وضعها القياسي إذا كان :-

(١) رأسها نقطة الأصل لنظام إحداثي متعامد

(٢) ضلعها الإبتدائي ينطبق على الاتجاه الموجب لمحور السينات

* في الشكل المقابل :- < أ و ب زاوية موجهة في الوضع القياسي .

---

* **القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة :-**

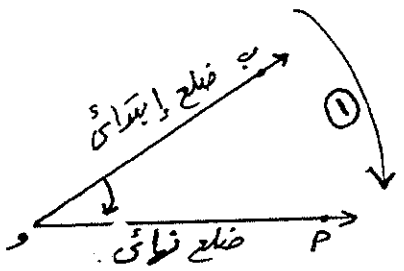
(I) يكون قياس الزاوية الموجهة موجباً إذا كان الإتجاه من الضلع الإبتدائي إلى الضلع النهائي في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة .

(II) يكون قياس الزاوية الموجهة سالباً إذا كان الإتجاه من الضلع الإبتدائي إلى الضلع النهائي مع اتجاه دوران عقارب الساعة .

* في الشكل المقابل :-

< أ و ب = (و أ ، و ب)

قياسها موجب لأن الدوران من الضلع الإبتدائي إلى النهائي عكس اتجاه حركة عقارب الساعة

< ب و أ = (و ب ، و أ)

قياسها سالب لأن الدوران من الضلع الابتدائي إلى النهائي مع اتجاه حركة عقارب الساعة

" ملاحظات هامة "

(١) كل زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسان إحداهما موجب والآخر سالب بحيث يكون مجموع القيمة المطلقة لكل منهما = 360° .

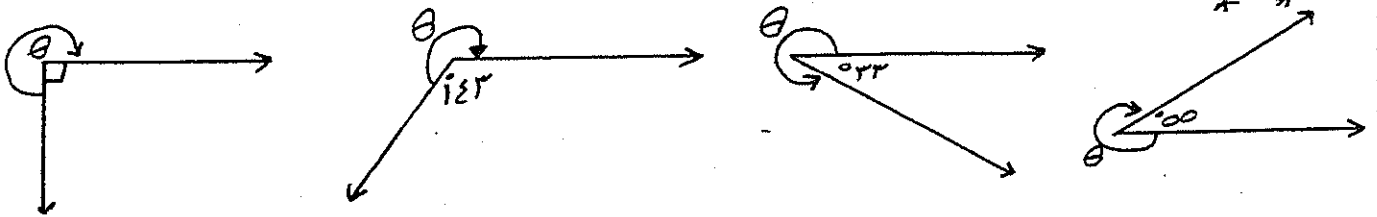
(٢) إذا كان (θ) هو القياس الموجب لزاوية موجهة فإن القياس السالب لها هو ($\theta - 360^\circ$)
وإذا كان ($-\theta$) هو القياس السالب لزاوية موجهة فإن القياس الموجب لها هو ($-\theta + 360^\circ$)

مثلاً :- • إذا كان قياس الزاوية = 120° فإن القياس السالب لها = $120^\circ - 360^\circ = -240^\circ$

• إذا كان قياس الزاوية = -300° فإن القياس الموجب لها = $-300^\circ + 360^\circ = 60^\circ$

---

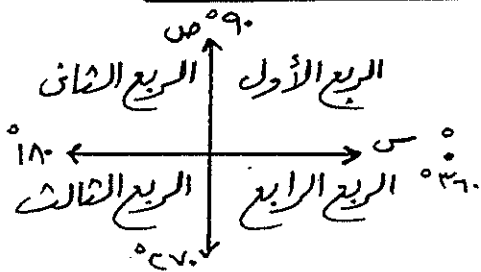
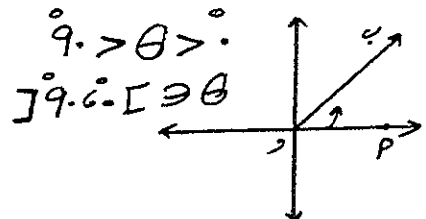
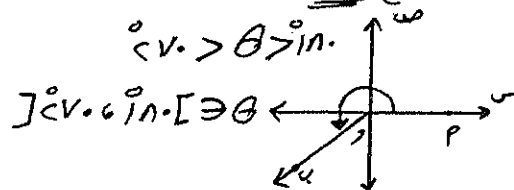
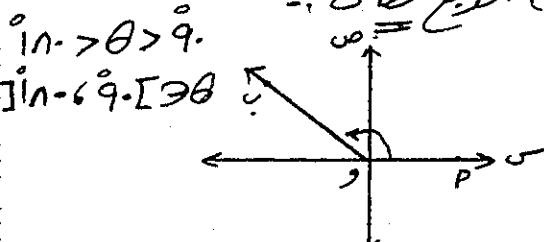
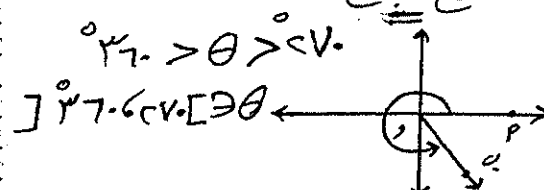
* تدريب * أوجد قياس الزاوية θ الموجهة في كل من الأشكال الآتية :-

---

* موقع الزاوية في المستوى الإحداثي المتعامد :-

من الشكل المقابل :- يقسم المستوى إلى أربعة أرباع .

ص 90°
الربع الثاني | الربع الأول
180° ← → س 0° ، 360°
الربع الثالث | الربع الرابع
270°

(١) الربع الأول :-
$0^\circ < \theta < 90^\circ$
$\theta \in]0^\circ , 90^\circ[$

(٢) الربع الثاني :-
$90^\circ < \theta < 180^\circ$
$\theta \in]90^\circ , 180^\circ[$

(٣) الربع الثالث :-
$180^\circ < \theta < 270^\circ$
$\theta \in]180^\circ , 270^\circ[$

(٤) الربع الرابع :-
$270^\circ < \theta < 360^\circ$
$\theta \in]270^\circ , 360^\circ[$

ملحوظة: إذا وقع الضلع النهائي لزاوية على أحد محوري الإحداثيات تسمى الزاوية في هذه الحالة بالزاوية الربعية وهذه الزوايا هي: °، °٩٠، °١٨٠، °٢٧٠، °٣٦٠

مثال ① :- عين الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا الآتية :-

°٨٢، °٢١٧، °١٣٥، °٢٩٥، °٢٧٠

الحل :-
* °٨٢ ⇐ °٩٠ > °٨٢ > ° ∴ °٨٢ تقع في الربع الأول
* °٢١٧ ⇐ °٢٧٠ > °٢١٧ > °١٨٠ ∴ °٢١٧ تقع في الربع الثالث
* °١٣٥ ⇐ °١٨٠ > °١٣٥ > °٩٠ ∴ °١٣٥ تقع في الربع الثاني
* °٢٩٥ ⇐ °٣٦٠ > °٢٩٥ > °٢٧٠ ∴ °٢٩٥ تقع في الربع الرابع
* °٢٧٠ ← زاوية ربعية

تدريب عين الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا الآتية :-

°٨٨، °١٥٢، °١٨٠، °٣٠٠، °١٩٠

---

* الزوايا المتكافئة :- عند رسم زاوية موجهة (θ) في الوضع القياسي فإن جميع الزوايا التي قياسها $\theta \pm ١ \times ٣٦٠$° أو $\theta \pm ٢ \times ٣٦٠$°، ..... أو $\theta \pm ن \times ٣٦٠$° حيث ن ∈ ص يكون لها نفس الضلع النهائي وتسمى زوايا متكافئة

أي أن :- الزوايا المتكافئة: هي الزوايا الموجهة في الوضع القياسي لها نفس الضلع النهائي وبالتالي :- أي زاوية لها عدد لا نهائي من الزوايا المتكافئة لها ونحصل عليها بجمع أو طرح ٣٦٠ من الزاوية أو مضاعفات °٣٦٠.

فمثلا :- الزاوية التي قياسها °١٢٠ تكافئ زاوية قياسها = °١٢٠ + °٣٦٠ = °٤٨٠

وأيضا تكافئ زاوية قياسها = °١٢٠ − °٣٦٠ = − °٢٤٠

وأيضا تكافئ زاوية قياسها = ١٢٠ + ٢ × ٣٦٠ = °٨٤٠ وهكذا ....

* تدريب * أوجد قياس زاويتين أحدهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب

** تكافئ كل من الزوايا الآتية (مشتركة معها في الضلع النهائي).

ج ٥٠° ، -١٢٥° ، -٢٤٠° ، -١٨٠°

مثال ② :- عين أصغر قياس موجب لكل من الزوايا الآتية :-

(١) -٦٢° ، (٢) -٢٢٥° ، (٣) ٥٣٠° ، (٤) -٧٩٠°

الحل :- (١) أصغر قياس موجب = -٦٢° + ٣٦٠° = ٢٩٨° .

(٢) أصغر قياس موجب = -٢٢٥° + ٣٦٠° = ١٣٥° .

(٣) أصغر قياس موجب = ٥٣٠° - ٣٦٠° = ١٧٠° .

(٤) أصغر قياس موجب = -٧٩٠° + ٣٦٠×٣ = ٢٩٠° .

مثال ③ :- عين الربع الذي تقع فيه كل زاوية مما يأتي

(١) ٨٧٥° (٢) -١٠٩٠°

الحل :- (١) ∵ ٨٧٥° ∉ [٠°، ٣٦٠°[← نأتي بأصغر قياس موجب مكافئ لها.

٨٧٥ - ٣٦٠×٢ = ١٥٥° ∴ ٨٧٥° تكافئ ١٥٥°

∵ الزاوية ١٥٥° تقع في الربع الثاني ∴ الزاوية ٨٧٥° تقع أيضاً في الربع الثاني.

(٢) ∵ -١٠٩٠° ∉ [٠°، ٣٦٠°[← نأتي بأصغر قياس موجب مكافئ لها.

-١٠٩٠° + ٣٦٠°×٤ = ٣٥٠° ∴ الزاوية -١٠٩٠° تكافئ ٣٥٠°

∵ الزاوية ٣٥٠° تقع في الربع الرابع ∴ الزاوية -١٠٩٠° تقع أيضاً في الربع الرابع.

---

* تدريب * عين الربع الذي تقع فيه كل زاوية مما يأتي

(١) ٥٥٠° (٢) -١٢٢٠°

تمارين على الزاوية الموجهة

1 أكمل ما يأتي :-

(١) تكون الزاوية الموجهة في الوضع القياسي إذا كان ....

(٢) يقال للزاوية الموجهة في الوضع القياسي أنها متكافئة إذا كان ....

(٣) إذا وقع الضلع النهائي لزاوية موجهة على أحد محوري الإحداثيات تسمى الزاوية ....

(٤) إذا كان θ قياس زاوية موجهة ، ن ∈ ص فإن الزوايا (θ ± ن × ٣٦٠) تسمى ......

(٥) الزاوية التي قياسها ٧٥° تقع في الربع ....

(٦) الزاوية التي قياسها -٥٠٠° تقع في الربع .....

(٧) أصغر قياس موجب للزاوية التي قياسها -٣٠٠° يساوي ......°

(٨) أكبر قياس سالب للزاوية التي قياسها ١٧٠° يساوي ......°

2 عين أصغر قياس موجب لكل من الزوايا الآتية ثم عين الربع الذي تقع فيه كل زاوية :-

(١) -٥٦° (٢) -٢١٥° (٥) ١٥َ ١٢٠°

(٤) ٤١٥° (٣) -٧٨٠° (٦) -١٨َ ٥٩٠°

3 أوجد قياس زاويتين أحدهما موجب والآخر سالب مشتركتين في الضلع النهائي لكل منه :-

(١) ١٠٠° (٢) -٢٥٠° (٣) -٤٢٠°

4 جميع الزوايا الآتية تكافئ الزاوية ٧٥° في الوضع القياسي ماعدا الإجابة .....

أ) -٢٨٥ ب) -٦٤٥ ج) ٢٨٥ د) ٤٣٥

5 يدور أحد لاعبي الجمباز على جهاز الألعاب بزاوية قياسها ٢٠٠°

ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي .

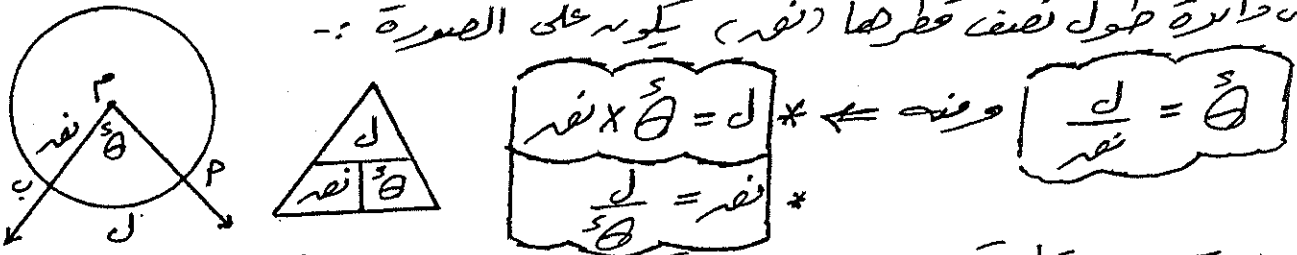
(٢) " القياس الستيني والقياس الدائري للزاوية "

* **القياس الدائري للزاوية :-**

واساسه تقسيم الدائرة إلى (2π) قوسًا متساوية في الطول وتسمى وحدة القياس (الزاوية النصف قطرية) ويرمز له بالرمز ($1^{د}$) ويقرأ واحد دائري " راديان "

⇐ **تعريف :-**

القياس الدائري لزاوية مركزية في دائرة ($\theta^{د}$) تحصر قوسًا طوله (ل) في دائرة طول نصف قطرها (نق) يكون على الصورة :-

$\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$ ومنه ⇐ * $ل = \theta^{د} \times نق$ * $نق = \frac{ل}{\theta^{د}}$

⇐ **الزاوية النصف قطرية :-** هي الزاوية المركزية في دائرة والتي تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة أي $ل = نق$ وبالتالي يكون $\theta^{د} = 1$

مثال :- الزاوية المركزية التي تحصر قوسًا طوله يساوي ضعف طول نصف قطر هذه الدائرة يكون قياسها = ...^{د}

الحل :- ∵ $\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$ ∵ $ل = ٢ نق$ ⇐ $\theta^{د} = \frac{٢ نق}{نق} = ٢^{د}$ #

مثال :- اذا كان القياس الدائري لزاوية مركزية = $0.5^{د}$ فإن هذه الزاوية تحصر قوسًا في دائرة = ... طول نصف قطر هذه الدائرة .

الحل :- ∵ $ل = \theta^{د} \times نق$ ⇐ $ل = \frac{1}{2} نق$ #

مثال ① :- زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها ١٥سم تحصر قوس طوله ٢٥سم أوجد قياسها بالتقدير الدائري

الحل :- ∵ $\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$ ⇐ $\theta^{د} = \frac{25}{15} = 1.67^{د}$

مثال ②:- زاوية مركزية قياسها ١,٣ ^د^ تحصر قوساً طوله ١٣ سم . أوجد طول قطر الدائرة ومساحة الدائرة ومحيطها لأقرب جزء من عشرة.

الحل :- ∵ θ = ١,٣ ^د^ ، ل = ١٣ سم

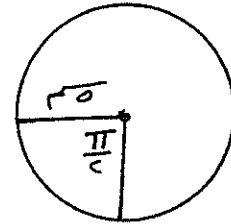
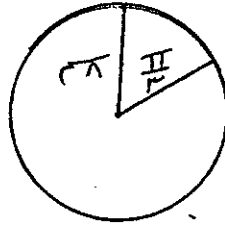
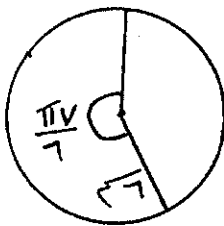
∴ نق = $\frac{ل}{\theta}$ ⟸ نق = $\frac{١٣}{١,٣}$ = ١٠ سم ∴ طول القطر = ٢ × ١٠ = ٢٠ سم

∴ مساحة الدائرة = ط نق^٢^ = $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٠^٢^ = ٣١٤,١٦ سم^٢^ .

∴ محيط الدائرة = ٢ ط نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٠ = ٦٢,٨٣ سم .

تدريب (١) زاوية مركزية تحصر قوساً طوله ٢٨ سم في دائرة طول قطرها ٢٤ سم أوجد قياسها بالتقدير الدائري .

(٢) زاوية مركزية قياسها ٢ ^د^ تحصر قوساً طوله ١١ سم أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة ومساحتها .

مثال ③ :- أوجد طول القوس الذي تحصره الزاوية المعلومة في كل من الدوائر الآتية مقرباً الناتج لأقرب جزء من عشرة .

الحل :- (١) طول القوس = θ × نق = $\frac{\pi}{٢}$ × ٥ = ٧,٩ سم

(٢) طول القوس = θ × نق = $\frac{\pi}{٦}$ × ٨ = ٤,٨ سم

(٣) طول القوس = θ × نق = $\frac{٧\pi}{٦}$ × ٦ = ٢٢ سم

*** العلاقة بين القياس الستيني والقياس الدائري :-**

إذا كان قياس زاوية بالتقدير الدائري = $\theta^{ء}$ ، قياسها بالتقدير الستيني = س°

فإن $\boxed{\frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{\theta^{ء}}{\pi}}$ ومنها :-

$\theta^{ء} = س^\circ \times \frac{ط}{١٨٠^\circ}$

$س^\circ = \theta^{ء} \times \frac{١٨٠^\circ}{ط}$

"حيث $ط = \frac{٢٢}{٧}$ "

"ملاحظات"

(١) $٩٠^\circ = \frac{\pi}{٢}^{ء}$ ، $١٨٠^\circ = \pi^{ء}$ ، $٢٧٠^\circ = \frac{٣\pi}{٢}^{ء}$

(٢) إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوي الواحد فإن الدائرة تسمى "دائرة الوحدة" ويكون $\boxed{\theta^{ء} = ل}$.

مثال ④ :- أوجد بالراديان القياس الدائري لأقرب رقمين عشريين للزوايا التي قياسها كالتالي :-

(١) ١٠٥° (٢) $٤٧^\circ\ ٣٦'\ ١٥''$

الحل :-

(١) $\theta^{ء} = س^\circ \times \frac{ط}{١٨٠^\circ} \Leftarrow \theta^{ء} = ١٠٥^\circ \times \frac{ط}{١٨٠^\circ} \simeq ١,٨٣^{ء}$

(٢) $\theta^{ء} = س^\circ \times \frac{ط}{١٨٠} \Leftarrow \theta^{ء} = ٤٧^\circ\ ٣٦'\ ١٥'' \times \frac{ط}{١٨٠} \simeq ٠,٨٣^{ء}$

مثال ⑤ :- أوجد القياس الستيني لكل من الزاويتين الآتيتين

(١) $٣,٤١^{ء}$ (٢) $٣\frac{٥}{٢}^{ء}$

الحل :-

(١) $\because س^\circ = \theta^{ء} \times \frac{١٨٠}{ط} \Leftarrow س^\circ = ٣,٤١^{ء} \times \frac{١٨٠}{ط} = ١٩٥^\circ\ ٢٢'\ ٤٣''$

(٢) $\because ٣\frac{٥}{٢}^{ء} = \frac{١١}{٢}^{ء}$ "دفع الكسر" $\Leftarrow س^\circ = \frac{١١}{٢} \times \frac{١٨٠}{ط} = ٣١٥^\circ\ ٧'\ ٣٦''$

* تدريب * (١) أوجد القياس الدائرى للزاويتين: ٨٣° ، ١٤ ٍ١٠°
* * (٢) أوجد القياس الستينى للزاويتين: ٥٧ ر٠ ، ١ر٢

"ملحوظة" :-

(١) π بالتقدير الدائرى تكافئ ١٨٠° بالتقدير الستينى

مثلاً :- $\frac{3}{5}\pi$ تكافئ $\frac{3}{5} \times 180^\circ = 108^\circ$.

1.2π تكافئ $1.2 \times 180^\circ = 216^\circ$.

(٢) إذا علم القياس الستينى لزاوية وطلب تحويلها إلى القياس الدائرى بدلالة π نستخدم القانون $\theta = س^\circ \times \frac{\pi}{180}$ ولا نعوض عن π .

مثلاً :- ٣٦° تكافئ $36 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{5} = \frac{1}{5}\pi$.

١٣٥° تكافئ $135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3}{4}\pi$.

مثال (٦) :- زاوية مركزية قياسها ٨٠° فى دائرة طول نصف قطرها ٥ سم . أوجد طول القوس الذى تحصره لأقرب سم

الحل :- ∵ س° = ٨٠° ، نق = ٥ سم

∴ $\theta = س^\circ \times \frac{\pi}{180} \Leftarrow \theta = 80 \times \frac{\pi}{180} = 1.4$

∴ ل = θ × نق = $1.4 \times 5 = 7$ سم .

مثال (٧) :- أوجد محيط الدائرة التى بها زاوية محيطية قياسها ٣٠° ويقابلها قوس طوله ٥ سم

الحل :- ∵ قياس الزاوية المحيطية = ٣٠° ∴ قياس الزاوية المركزية = ٦٠°

$\theta = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{1}{3}\pi$

∴ نق = $\frac{ل}{هـ}$ ⇐ نق = $\frac{٥}{\frac{١}{٣}\pi}$ = $\frac{١٥}{\pi}$ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ ط نق = ٢ × π × $\frac{١٥}{\pi}$ = ٣٠ سم

مثال ⑧ :- زاويتان مجموع قياسيهما الدائري ٣ $\frac{١}{٧}$ ء والفرق بينهما قياسها ٣٠°
أوجد قياس كل منهما بالتقدير الدائري والستيني ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

الحل :-

∵ ٣ $\frac{١}{٧}$ = $\frac{٢٢}{٧}$ ء ⇐ س° = $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{١٨٠}{\pi}$ = ١٨٠°

نفرض أن الزاويتان هما س ، ص ، س > ص

∴ س + ص = ١٨٠°
س − ص = ٣٠°
(بالجمع) ⇐ ٢س = ٢١٠° (÷٢) ⇐ **س = ١٠٥°**

بالتعويض في المعادلة الأولى ⇐ ١٠٥° + ص = ١٨٠° ⇐ **ص = ٧٥°**

∴ ق(س) بالدائري = ١٠٥° × $\frac{ط}{١٨٠}$ = ١٫٨٣ ء

∴ ق(ص) بالدائري = ٧٥° × $\frac{ط}{١٨٠}$ = ١٫٣١ ء

مثال ⑨ من الشكل المقابل :- $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسان للدائرة م
م أ = ١٢ سم فأوجد طول القوس ب جـ الأكبر
إذا علم أن طول نصف قطر الدائرة م = ٦ سم

الحل :-

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسان للدائرة م ∴ $\overline{أب} \perp \overline{مب}$ ، $\overline{أجـ} \perp \overline{مجـ}$

، ق(∠ب أ م) = ق(∠جـ أ م)

∵ م جـ = $\frac{١}{٢}$ أ م ∴ ق(∠جـ أ م) = ٣٠° "مثلث ثلاثيني ستيني"

∴ ق(∠ب م جـ) = ٢ × ٣٠ = ٦٠°

∴ ق(∠ب م جـ) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٦٠) = ١٢٠°

∴ ق(∠ب م جـ) المنعكسة = ٣٦٠ − ١٢٠ = ٢٤٠°

∴ θ = س° × $\frac{ط}{١٨٠}$ = ٢٤٠° × $\frac{ط}{١٨٠}$ = $\frac{٤}{٣}$ ط ≃ ٤٫١٩

∴ ل = θ × نق ⇐ ل = ٤٫١٩ × ٦ ≃ ٢٥ سم ⇐ طول بجـ الأكبر ≃ ٢٥ سم.

مثال ⑩ :- تدور صناعي يدور حول الأرض في مسار دائري دورة كاملة كل ٣ ساعات وإذا كان طول نصف قطر الأرض يبلغ تقريبًا ٦٤٠٠ كم وبعد القمر عن سطح الأرض ٣٦٠٠ كم أوجد المسافة التي يقطعها القمر خلال ساعة واحدة مقربًا الناتج لأقرب كم.

الحل :-

∴ طول نصف قطر دائرة مسار القمر = م أ

∴ م أ = م جـ + جـ أ = ٦٤٠٠ + ٣٦٠٠ = ١٠٠٠٠ كم

∴ القمر يقطع المسار الدائري " دورة كاملة " في ٣ ساعات وهذا يقابل زاوية مركزية ٣٦٠° (٢ط)

∴ القمر يقطع قوسًا طوله $\frac{١}{٣}$ محيط الدائرة في الساعة الواحدة وهذا يقابل زاوية مركزية ١٢٠° ($\frac{٢ط}{٣}$)

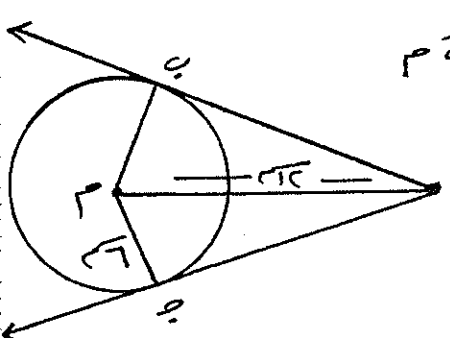
∴ ل = θ × نق ⇐ ل = $\frac{٢ط}{٣}$ × ١٠٠٠٠ ≃ ٢٠٩٤٤ كم

م | جـ | أ

← الأرض

← مسار القمر حول الأرض

---

* تدريب * يدور أحد لاعبي الجمباز على جهاز الألعاب بزاوية قياسها ٢٠٠° ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي وأوجد قياسها بالتقدير الدائري.

تمارين على "طرق قياس الزاوية"

أولاً: اختيار من متعدد:

(١) الزاوية التي قياسها ٦٠° في الوضع القياسي تكافئ الزاوية التي قياسها: ....

أ ١٢٠°   ب ٢٤٠°   جـ ٣٠٠°   د ٤٢٠°

(٢) الزاوية التي قياسها $\frac{٣١\pi}{٦}$ تقع في الربع: ....

أ الأول   ب الثاني   جـ الثالث   د الرابع

(٣) الزاوية التي قياسها $\frac{-٩\pi}{٤}$ تقع في الربع: ....

أ الأول   ب الثاني   جـ الثالث   د الرابع

(٤) إذا كان مجموع قياسات زوايا أي مضلع منتظم تساوي ١٨٠°(ن − ٢) حيث ن عدد الأضلاع، فإن قياس زاوية المخمس المنتظم بالقياس الدائري تساوي: ....

أ $\frac{\pi}{٣}$ ب $\frac{٧\pi}{٢}$ جـ $\frac{٣\pi}{٥}$ د $\frac{٢\pi}{٣}$

(٥) الزاوية التي قياسها $\frac{٧\pi}{٣}$ قياسها الستيني يساوي: ....

أ ١٠٥°   ب ٢١٠°   جـ ٤٢٠°   د ٨٤٠°

(٦) إذا كان القياس الستيني لزاوية هو ٤٨َ ٦٤ْ فإن قياسها الدائري يساوي: ....

أ ٠,١٨ ء   ب ٠,٣٦ ء   جـ ٠,١٨ π د ٠,٣٦ π

(٧) طول القوس في دائرة طول قطرها ٢٤ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ٣٠° يساوي: ....

أ ٢π سم   ب ٣π سم   جـ ٤π سم   د ٥π سم

(٨) القوس الذي طوله ٥πسم في دائرة طول نصف قطرها ١٥سم يقابل زاوية مركزية قياسها يساوي: ....

أ ٣٠°   ب ٦٠°   جـ ٩٠°   د ١٨٠°

(٩) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث ٧٥° وقياس زاوية أخرى فيه $\frac{\pi}{٤}$ فإن القياس الدائري للزاوية الثالثة يساوي: ....

أ $\frac{\pi}{٦}$ ب $\frac{\pi}{٤}$ جـ $\frac{\pi}{٣}$ د $\frac{٥\pi}{١٢}$

ثانيا: أجب عن الأسئلة الآتية:

١٠ أوجد بدلالة π القياس الدائرى للزوايا التى قياساتها كالآتى:

أ ٢٢٥° .... ب ٢٤٠° ....

جـ −١٣٥° .... د ٣٠٠° ....

هـ ٣٩٠° .... و ٧٨٠° ....

١١ أوجد بالراديان القياس الدائرى للزوايا التى قياساتها كالآتى، مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية:

أ ٥٦,٦° ب ٢٥° ١٨َ جـ ١٦٠° ٥٠َ ٤٨ً

....

١٢ أوجد القياس الستينى للزوايا التى قياساتها كالآتى، مقربًا الناتج لأقرب ثانية:

أ ٠,٤٩ ء ب ٢,٣٧ ء جـ $٣\frac{١}{٢}$ ء

....

١٣ إذا كانت θ زاوية مركزية فى دائرة طول نصف قطرها نق وتحصر قوسًا طوله ل :

أ إذا كان نق = ٢٠ سم، θ = ٧٨° ١٥َ ٢٠ً أوجد ل. .... (لأقرب جزء من عشرة)

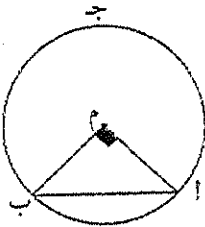
ب إذا كان ل = ٢٧,٣ سم، θ = ٧٨° ٠َ ٢٤ً أوجد نق. .... (لأقرب جزء من عشرة)

١٤ زاوية مركزية قياسها ١٥٠° وتحصر قوسًا طوله ١١ سم، احسب طول نصف قطر دائرتها (لأقرب جزء من عشرة)

....

١٥ أوجد القياس الدائرى والقياس الستينى للزاوية المركزية التى تقابل قوسًا طوله ٨,٧ سم فى دائرة طول نصف قطرها ٤ سم............

١٦ الربط بالهندسة: مثلث قياس إحدى زواياه ٦٠° وقياس زاوية أخرى منه يساوى $\frac{\pi}{٤}$ أوجد القياس الدائرى والقياس الستينى لزاويته الثالثة. ....

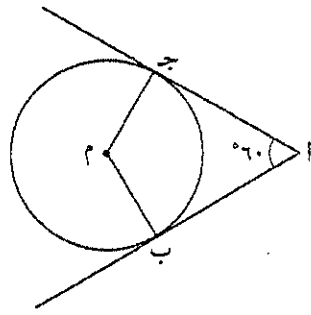
١٧ الربط بالهندسة: دائرة طول نصف قطرها ٤ سم، رسمت ∠أ ب جـ المحيطية التى قياسها ٣٠° أوجد طول القوس الأصغر أجـ ....

١٨ الربط بالهندسية: فى الشكل المقابل إذا كان مساحة المثلث م أ ب القائم الزاوية فى م = ٣٢ سم² فأوجد محيط الشكل مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين ....

(١٩) الربط بالهندسة: $\overline{اب}$ قطر في دائرة طوله ٢٤ سم ، رسم الوتر $\overline{اجـ}$ بحيث كان ق(∠ب اجـ) = ٥٠°
أوجد طول القوس الأصغر $\overset{\frown}{اجـ}$ مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين. ....

(٢٠) مسافات: كم المسافة التى تقطعها نقطة على طرف عقرب الدقائق خلال ١٠ دقائق إذا كان طول هذا العقرب ٦ سم؟

....

(٢١) فلك: قمر صناعى يدور حول الأرض فى مسار دائرى دورة كاملة كل ٦ ساعات، فإذا كان طول نصف قطر مساره عن مركز الأرض ٩٠٠٠ كم، فأوجد سرعته بالكيلومتر فى الساعة.

....

(٢٢) الربط بالهندسة: فى الشكل المقابل:

$\overline{اب}$ ، $\overline{اجـ}$ مماسان للدائرة م، ق (∠ جـ اب) = ٦٠°، اب = ١٢ سم.
أوجد لأقرب عدد صحيح طول القوس الأكبر $\overset{\frown}{ب جـ}$.

....

(٢٣) الربط بالزمن: تستخدم المزولة الشمسية لتحديد الوقت أثناء النهار من خلال طول الظل الذى يسقط على سطح مدرج لإظهار الساعة وأجزائها، فإذا كان الظل يدور على القرص بمعدل ١٥° لكل ساعة.

أ أوجد قياس الزاوية بالراديان التى يدور الظل عنها بعد مرور ٤ ساعات.

....

ب بعد كم ساعة يدور الظل بزاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ راديان؟..........................

جـ مزولة طول نصف قطرها ٢٤ سم، أوجد بدلالة π طول القوس الذى يصنعه دوران الظل على حافة القرص بعد مرور ١٠ ساعات. ....

(٢٤) تفكير ناقد: مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ راديان فى الوضع القياسى لدائرة الوحدة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. أوجد معادلة هذا المستقيم. ....

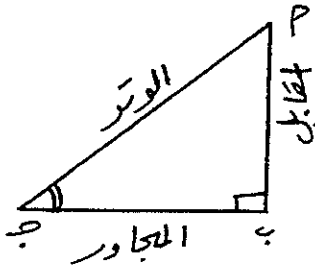
....

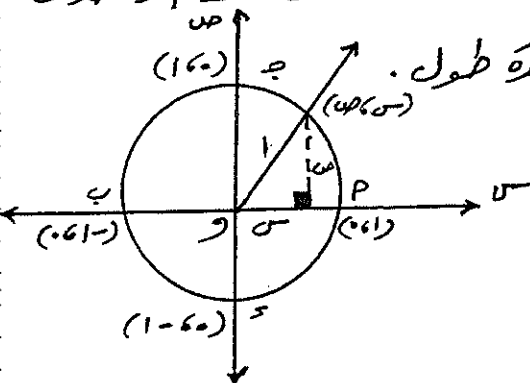
....

(٣) " الدوال المثلثية "

تمهيد :- نعلم أنه :- في أى مثلث أ ب جـ قائم في ب يكون :-

جا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{أب}{أجـ}$ ، جتا جـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{بجـ}{أجـ}$

ظا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{أب}{بجـ}$

أى أنه :- النسبة المثلثية للزاوية الحادة بنسبة ثابتة لا تتغير إلا إذا تغير قياس زاويتها.

دائرة الوحدة :- دائرة الوحدة هى دائرة مركزها نقطة الأصل لنظام إحداثى متعامد وطول نصف قطرها يساوى وحدة طول.

- دائرة الوحدة تقطع محور السينات في النقطتين أ (١ ، ٠) ، ب (-١ ، ٠) وتقطع محور الصادات في النقطتين جـ (٠ ، ١) ، د (٠ ، -١)

⊗ إذا كانت (س ، ص) هما إحداثيا أى نقطة على دائرة الوحدة فإنه

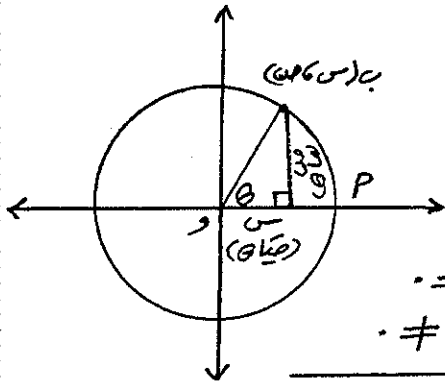
$$س^2 + ص^2 = 1$$

" من فيثاغورث " (مهمة)

حيث س ∈ [-١ ، ١]
ص ∈ [-١ ، ١]

الدوال المثلثية الأساسية للزاوية :-

لأى زاوية موجهة في الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب (س ، ص) وقياسها θ يمكن تعريف الدوال الآتية :-

(١) جيب الزاوية θ = الإحداثى الصادى للنقطة ب ⇐ جا θ = ص

(٢) جيب تمام الزاوية θ = الإحداثي السيني للنقطة ب

⇐ جتا θ = س

(٣) ظل الزاوية θ = الاحداثي الصادي / الاحداثي السيني

⇐ ظا θ = ص / س ، ظا θ = جا θ / جتا θ ، س ≠ ٠ ، جتا θ ≠ ٠

• "ملحوظة" (١) يكتب (س ، ص) لأى نقطة على دائرة الوحدة على الصورة (جتا θ ، جا θ)

مثال :- إذا كانت النقطة (٥/١٣ ، ١٢/١٣) هى نقطة تقاطع الضلع النهائى لزاوية موجهة قياسها θ مع دائرة الوحدة فإن :-

جتا θ = ٥/١٣ ، جا θ = ١٢/١٣ ، ظا θ = جا θ / جتا θ = ١٢/٥

(٢) الزوايا المتكافئة لها نفس الدوال المثلثية .

مثال :- جتا ٤٢٠° = جتا (٤٢٠° − ٣٦٠°) = جتا ٦٠° "حيث ٤٢٠° تكافئ ٦٠°"

مقلوبات الدوال المثلثية :-

لأى زاوية موجهة فى الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب (س ، ص) إذا كان قياس الزاوية θ فإن :-

(١) قاطع الزاوية θ : قا θ = ١/س = ١/جتا θ ، حيث س ≠ ٠ .

(٢) قاطع تمام الزاوية θ : قتا θ = ١/ص = ١/جا θ ، حيث ص ≠ ٠ .

(٣) ظل تمام الزاوية θ : ظتا θ = س/ص = ١/ظا θ = جتا θ / جا θ ، ص ≠ ٠ .

مثال ① :- أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ المرسومة في الوضع القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ا في كل مما يأتي :-

(١) ا(٠ ، -١) (٢) ا(س ، ٣/٥) ، س > ٠ (٣) ا(-س ، س) ، س ∈ ح⁻

الحل :-

(١) ا(٠ ، -١) ⇐ جتا θ = صفر ، قا θ = ١/٠ (غير معرفة)

جا θ = -١ ، قتا θ = -١

ظا θ = -١/٠ (غير معرفة) ، ظتا θ = ٠/-١ = صفر

(٢) ∵ لأي نقطة على دائرة الوحدة س² + ص² = ١

⇐ س² + (٣/٥)² = ١ ⇐ س² + ٩/٢٥ = ١ ⇐ س² = ١ - ٩/٢٥ = ١٦/٢٥

∴ س = ± √(١٦/٢٥) = ± ٤/٥   ∵ س > ٠ ⇐ **س = ٤/٥**

∴ ا(٤/٥ ، ٣/٥) ⇐ جتا θ = ٤/٥ ، قا θ = ٥/٤

جا θ = ٣/٥ ، قتا θ = ٥/٣

ظا θ = ٣/٤ ، ظتا θ = ٤/٣

(٣) ∵ لأي نقطة على دائرة الوحدة س² + ص² = ١

⇐ (-س)² + س² = ١ ⇐ س² + س² = ١ ⇐ ٢س² = ١ ⇐ س² = ١/٢

∴ س = ± √(١/٢) = ± ١/√٢   ∵ س ∈ ح⁻ ⇐ **س = -١/√٢**

∴ ا(+١/√٢ ، -١/√٢) ⇐ جتا θ = ١/√٢ ، قا θ = √٢

جا θ = -١/√٢ ، قتا θ = -√٢

ظا θ = -١ ، ظتا θ = -١

مثال ② :- إذا عينت الزاوية الموجهة في الوضع القياسي والتي قياسها θ النقطة ب(٣ا ، -٤ا) على دائرة الوحدة حيث ا > ٠ . أوجد جميع الدوال المثلثية ثم أوجد جتا θ + جا θ .

الحل :- ∵ لأى نقطة على دائرة الوحدة $س^2 + ص^2 = 1$

$\Leftarrow (٣أ)^2 + (-٤أ)^2 = 1 \Leftarrow ٩أ^2 + ١٦أ^2 = 1 \Leftarrow ٢٥أ^2 = 1 \Leftarrow أ^2 = \frac{1}{25}$

$\therefore أ = \pm\sqrt{\frac{1}{25}} = \pm\frac{1}{5}$　　∵ $أ > ٠ \Leftarrow$ $\boxed{أ = \frac{1}{5}}$

$\therefore ب(٣أ ، -٤أ) \Leftarrow ب(٣ \times \frac{1}{5} ، -٤ \times \frac{1}{5}) = (\frac{3}{5} ، -\frac{4}{5})$

$\therefore$ جتا $\theta = \frac{3}{5}$　　　قا $\theta = \frac{5}{3}$

جا $\theta = -\frac{4}{5}$　　　قتا $\theta = -\frac{5}{4}$

ظا $\theta = -\frac{4}{3}$　　　ظتا $\theta = -\frac{3}{4}$

$\Leftarrow$ جتا$^2\theta$ + جا$^2\theta = (\frac{3}{5})^2 + (-\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = \boxed{1}$ #

---

* تدريب * أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ المرسومة في الوضع القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب حيث :-

(١) ب$(\frac{1}{2} ، \frac{\sqrt{3}}{2})$　　(٢) ب(٠ ، س) ، س > ٠　　(٣) ب(-ص ، -ص) ، ص > ٠

إشارة الدوال المثلثية :-

الربع	الفترة التي تقع فيها الزاوية	إشارة الدوال المثلثية: جا، قتا	جتا، قا	ظا، ظتا
الأول	$]٠ ، \frac{\pi}{2}[$	+	+	+
الثاني	$]\frac{\pi}{2} ، \pi[$	+	−	−
الثالث	$]\pi ، \frac{3\pi}{2}[$	−	−	+
الرابع	$]\frac{3\pi}{2} ، 2\pi[$	−	+	−

ص ٩٠° ($\frac{\pi}{2}$)

الربع الأول "كل الدوال موجبة"

الربع الثاني "جا ، قتا موجبتان"

س ٣٦٠° ، ٠ (2π)　　　سَ ١٨٠° (π)

الربع الرابع "جتا ، قا موجبتان"

الربع الثالث "ظا ، ظتا موجبتان"

صَ ٢٧٠° ($\frac{3\pi}{2}$)

مثال ③ :- حدد إشارة الدوال الآتية :-

جا ٦٠° ، جتا ٢٤٠° ، ظتا ٢١٠° ، قا ٣٠٠° ، قتا $\frac{\pi ٢}{٣}$ ، ظا -٣٠ ، جتا ٩٧٠°

الحل :- * ∵ ٦٠° تقع في الربع الأول ∴ جا ٦٠° موجبة

* ∵ ٢٤٠° تقع في الربع الثالث ∴ جتا ٢٤٠° سالبة

* ∵ ٢١٠° تقع في الربع الثالث ∴ ظتا ٢١٠° موجبة

* ∵ ٣٠٠° تقع في الربع الرابع ∴ قا ٣٠٠° موجبة

* ∵ $\frac{\pi ٢}{٣} = \frac{١٨٠ \times ٢}{٣}$ = ١٢٠° (الثاني) ∴ قتا $\frac{\pi ٢}{٣}$ موجبة

* ∵ -٣٠° تكافئ -٣٠ + ٣٦٠ = ٣٣٠° (الرابع) ∴ ظا -٣٠ سالبة

* ∵ ٩٧٠° تكافئ ٩٧٠ - ٣٦٠ ⇐ ٦١٠ - ٣٦٠ = ٢٥٠° (الثالث) ∴ جتا ٩٧٠ سالبة

تدريب * حدد إشارة الدوال الآتية :-

جا ١١٠° ، جتا ٣٩٠° ، ظتا $\frac{-\pi}{٤}$ ، قا ٣٠٠° ، ظا ٢٠٠°

مثال ④ :- إذا كان الضلع النهائي لزاوية θ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب(٦و٠ ، ص) فأوجد قيمة ص حيث θ ∈]٢٧٠° ، ٣٦٠°[

ثم أوجد ظتا θ ، قتا θ ثم احسب قيمة قا٢ θ + قتا٢ θ

الحل :- لأي نقطة على دائرة الوحدة س٢ + ص٢ = ١

∴ (٦و٠)٢ + ص٢ = ١ ⇐ ٣٦و٠ + ص٢ = ١ ⇐ ص٢ = ٦٤و٠

⇐ ص = ± $\sqrt{٠٫٦٤}$ = ± ٨و٠

∵ θ ∈]٢٧٠° ، ٣٦٠°[∴ θ تقع في الربع الرابع ∴ ص سالبة

∴ ص = -٨و٠ ⇐ ب(٦و٠ ، -٨و٠)

∴ ظتا θ = $\frac{س}{ص} = \frac{٠.٦}{-٠.٨} = \frac{-٣}{٤}$ ، قتا θ = $\frac{١}{جا \theta} = \frac{١}{-٠.٨} = \frac{-٥}{٤}$

قيمة المقدار قا² θ + قتا² θ = $(\frac{١}{٠.٦})^2 + (\frac{-٥}{٤})^2 = \frac{٢٥}{٩} + \frac{٢٥}{١٦} = \frac{٦٢٥}{١٤٤}$

مثال ⑤ :- إذا كانت $٢٧٠° < \theta < ٣٦٠°$ وكان جا θ = $-\frac{٥}{١٣}$ أوجد جميع النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ .

الحل :- ∵ ص = جا θ = $-\frac{٥}{١٣}$

، س = جتا θ حيث جتا θ > ٠ (لماذا؟)

∵ س² + ص² = ١ ∴ جتا² θ + $(\frac{-٥}{١٣})^2$ = ١

∴ جتا² θ + $\frac{٢٥}{١٦٩}$ = ١ ⇐ جتا² θ = ١ − $\frac{٢٥}{١٦٩}$ = $\frac{١٤٤}{١٦٩}$

∴ جتا θ = $\pm \frac{١٢}{١٣}$ (مرفوض) ⇐ جتا θ = $\frac{١٢}{١٣}$ (لأن θ تقع في الرابع)

⇐ ظا θ = $\frac{جا \theta}{جتا \theta}$ = $-\frac{١٢}{٥}$ #

---

* تدريب * (١) إذا كانت θ قياس زاوية في الوضع القياسي حيث $\frac{\pi}{٢} < \theta < \pi$ ، جا θ = $\frac{٤}{٥}$ أوجد جتا θ ، ظا θ

(٢) إذا كانت $١٨٠° < \theta < ٢٧٠°$ وكانت جتا θ = $-\frac{٤}{٥}$

أوجد جميع النسب المثلثية للزاوية θ

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة :-

* $0°$ أ $360°$ ← (١ ، ٠) جتا ، جا — ظا صفر
* $90°$ ← (٠ ، ١) غير معرفة
* $180°$ ← (-١ ، ٠) صفر
* $270°$ ← (٠ ، -١) غير معرفة
* $30°$ ← $(\frac{\sqrt{3}}{2} ، \frac{1}{2})$ — $\frac{1}{\sqrt{3}}$
* $60°$ ← $(\frac{1}{2} ، \frac{\sqrt{3}}{2})$ — $\sqrt{3}$
* $45°$ ← $(\frac{1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{\sqrt{2}})$ — ١

مع العلم أن $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ويمكن تلخيص ذلك في الجدول التالي :-

قياس زاوية θ	إحداثي النقطة التي يتقاطع ضلعها النهائي مع دائرة الوحدة	قيم الدوال المثلثية		
		جا θ	جتا θ	ظا θ
$0°$ أ $360°$ (2π)	(١ ، ٠)	٠	١	٠
$90°$ $(\frac{\pi}{2})$	(٠ ، ١)	١	٠	غير معرف
$180°$ (π)	(-١ ، ٠)	٠	-١	٠
$270°$ $(\frac{3\pi}{2})$	(٠ ، -١)	-١	٠	غير معرف
$30°$ $(\frac{\pi}{6})$	$(\frac{\sqrt{3}}{2} ، \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$60°$ $(\frac{\pi}{3})$	$(\frac{1}{2} ، \frac{\sqrt{3}}{2})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$45°$ $(\frac{\pi}{4})$	$(\frac{1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	١

مع العلم أن $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

"ملحوظة" يمكن إيجاد هذه الدوال المثلثية باستخدام الآلة الحاسبة حيث

جا ← sin

جتا ← cos

ظا ← tan

مثال : جا ٣٠ $\Rightarrow \sin(30) = \frac{1}{2}$

مثال ⑥ :- بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :-

(١) جا ٣٠° جتا ٦٠° + جا ٩٠° − جتا² ٤٥°   (٢) جتا ٩٠° قتا ٣٠° + قا² ٤٥° جا ٣٠°

الحل :-

(١) جا ٣٠° جتا ٦٠° + جا ٩٠° − جتا² ٤٥° = $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$ + ١ − $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2$

= $\frac{1}{4}$ + ١ − $\frac{1}{2}$ = $\boxed{\frac{3}{4}}$

(٢) جتا ٩٠° قتا ٣٠° + قا² ٤٥° جا ٣٠° = ٠ × $\frac{1}{2}$ + $\sqrt{2}$ × $\frac{1}{2}$ = ٠ + $\frac{\sqrt{2}}{2}$ = $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

مثال ⑦ :- أثبت أن :- (١) جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠° = جا ٩٠°

(٢) جتا $\frac{\pi}{2}$ = جتا² $\frac{\pi}{4}$ − جا² $\frac{\pi}{4}$

الحل :-

(١) الطرف الأيمن = جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠° = $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$ + $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{1}{4}$ + $\frac{3}{4}$

= ١ = جا ٩٠° = الطرف الأيسر #

(٢) الطرف الأيسر = جتا² $\frac{\pi}{4}$ − جا² $\frac{\pi}{4}$ = جتا² ٤٥° − جا² ٤٥° = $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2$ − $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2$ = صفر

الطرف الأيمن = جتا $\frac{\pi}{2}$ = جتا ٩٠° = صفر ∴ الطرفان متساويان

---

* تدريب * أوجد قيمة :- (١) جا² ٤٥° + جتا² ٢٧٠° − جتا² ٦٠°

(٢) ٣ جا ٣٠° جا² ٦٠° − جتا ٠° قا ٦٠° + جا ٢٧٠° جتا² ٤٥°

* أثبت أن :- (١) ١ − ٢ جا² ٩٠° = جتا ١٨٠°

(٢) جا ٦٠° جتا ٣٠° − جتا ٦٠° جا ٣٠° = جا² $\frac{\pi}{3}$

(٣) ظا² ٦٠° − ٨ جتا ٦٠° + ظا² ٤٥° = جا ٣٠° − جتا² ٤٥°

مثال ⑧ :- أوجد قيمة س في كل مما يأتي :-

(١) س جا $\frac{\pi}{6}$ جتا² $\frac{\pi}{4}$ = جتا² ٣٠° جا $\frac{\pi}{2}$ ، (٢) جا(٢س + ١٠) = ١ ، س حادة

الحل :-

(١) ∵ س جا $\frac{\pi}{6}$ جتا² $\frac{\pi}{4}$ = جتا² ٣٠° جا $\frac{\pi}{2}$ ⇐ س جا ٣٠° جتا² ٤٥° = جتا² ٣٠° جا ٩٠°

⇐ س × $\frac{1}{2}$ × $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2$ = $(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ × ١ ⇐ $\frac{1}{4}$ س = $\frac{3}{4}$ $\overset{(\times 4)}{\Longleftarrow}$ **س = ٣**

(٢) ∵ جا(٢س + ١٠) = ١ ∴ جا ٩٠ = ١

∴ ٢س + ١٠ = ٩٠° ⇐ ٢س = ٨٠° $\overset{(\div 2)}{\Longleftarrow}$ **س = ٤٠°**

مثال ⑨ أوجد قيمة θ حيث: θ < ٩٠° والتي تحقق المعادلة :-

$$ظا ٦٠° ظا θ = \frac{ظا^2 ٣٠° ظا^2 ٦٠° ظا ٤٥°}{٤ جا ٤٥° جتا ٦٠°}$$

الحل

⇐ $\sqrt{3}$ ظا θ = $\frac{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 \times (\sqrt{3})^2 \times 1}{4 \times (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 \times \frac{1}{2}}$ ⇐ $\sqrt{3}$ ظا θ = $\frac{\frac{1}{3} \times 3 \times 1}{4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}$ ⇐

$\sqrt{3}$ ظا θ = ١ ⇐ ظا θ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ∴ θ = ٣٠°

*** تدريب *** * أوجد قيمة س في كل مما يأتي :-

(١) س جا² $\frac{\pi}{4}$ جتا π = ظا² $\frac{\pi}{3}$ جا $\frac{3\pi}{2}$ ، (٢) جتا(٣س + ٣٠) = -١ ، س حادة

* إذا كان: ظا θ (قا² ٤٥ + جا ٧٠)° = قتا² ٦٠° + جتا ١٨٠°

أوجد قيمة θ حيث θ ∈]٠°، ٩٠°[.

تمارين على الدوال المثلثية

١ اختر الإجابة الصحيحة :-

(١) جا ..... موجبة [١١٠° ، ٣١٠° ، ٢١٠° ، ٥١٠°]

(٢) جتا ..... سالبة [٥٦° ، ٦٥° ، ١٥٦° ، ٣٥٦°]

(٣) ظا ..... موجبة [٥٠° ، ١٥٠° ، −١٥٠° ، −٥٠°]

(٤) إذا كان جا θ = ½ ، θ حادة فإن ق(θ̂) = ... [٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ٩٠°]

(٥) إذا كان جا θ = −١ ، جتا θ = ٠ فإن د = θ = ... [$\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$ ، 2π]

(٦) إذا كانت قتا θ = ٢ ، θ حادة فإن ق(θ̂) = ... [١٥° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠°]

(٧) إذا كانت جتا θ = ½ ، جا θ = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن د = θ = ... [$\frac{2\pi}{3}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{5\pi}{3}$ ، $\frac{11\pi}{6}$]

(٨) إذا كان ظا θ = ١ ، θ حادة فإن ق(θ̂) = ... [١٠° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠°]

(٩) ظا ٤٥ + ظتا ٤٥ − قا ٦٠° تساوي ..... [٠ ، ½ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، ١]

(١٠) إذا كان جتا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، θ حادة فإن جا θ = ... [½ ، $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$]

(١١) إذا كان جتا ٢θ = ½ ، θ حادة فإن ق(θ̂) = ... [٦٠° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٩٠°]

(١٢) إذا كان ½ جتا θ = ¼ ، θ حادة فإن ق(θ̂) = ... [٦٠° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٩٠°]

(١٣) إذا كان ظا(θ − ٥) = ١ ، θ حادة فإن ق(θ̂) = ... [٤٠° ، ٥٠° ، ٤٥° ، ٥٥°]

(١٤) إذا كانت الزاوية θ في الوضع القياسي لدائرة الوحدة يمر ضلعها النهائي بالنقطة (½ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$) فإن جا θ = ... [½ ، $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{2}{\sqrt{3}}$]

---

٢ ابحث إشارة كل من الدوال المثلثية الآتية :-

جا ٢٤٠° ، ظا ٣٦٥° ، قتا ١٠٢° ، ظتا $\frac{9\pi}{4}$ ، قا $-\frac{9\pi}{4}$ ، ظا $-\frac{20\pi}{9}$

٣ أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ والتي يمر ضلعها النهائي بالنقاط الآتية :-

(١) ($\frac{2}{3}$ ، $\frac{\sqrt{5}}{3}$) (٢) ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، ½) (٣) ($\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

٤ إذا كان θ هو قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي ، والتي يمر ضلعها النهائي بدائرة الوحدة أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ في الحالات الآتية :-

(١) (-٤/٥ ، ص) ، ص ∈ ح+   (٢) (س ، ٣س) ، س > ٠ .

(٣) (√٣/٢ م ، -٢م) ، ٣π/٢ < θ < ٢π   (٤) (-س ، ١/٢) ، س > ٠ .

٥ إذا كان الضلع النهائي للزاوية θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب وكان جتا θ = ٤/٥ حيث θ ∈]٢٧٠° ، ٣٦٠°[فأوجد إحداثي ب ثم اثبت أن ١ + ظتا² θ = قتا² θ .

٦ أثبت أن النقطة ب (٢√٢/٣ ، -١/٣) تقع على دائرة الوحدة وأوجد ظتا θ

٧ إذا كان قا θ = ٢ وكان θ ∈]٣π/٢ ، ٢π[أوجد ظا θ .

٨ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي :-

(١) ظا² ٣٠° + ظا ٤٥° + ظا ١٨٠°   (٤) جتا π/٢ × جتا ٠° + جا ٣π/٢ × جا π/٢ .

(٢) ٣ جا ٣٠° ظا ٤٥° + ٢ قا² ٤٥° - ظا² ٦٠°   (٥) قا π/٦ ظا π/٣ - ظتا π/٣ جتا π/٦

(٣) قا ٦٠° - ٤ قا² ٤٥° + جا ٢٧٠°   (٦) ٣ جا ٣٠° قا² ٦٠° - جتا ٠° قا ٦٠° + جا ٢٧٠° جتا ٤٥°

٩ اثبت صحة كل من المتساويات الآتية :-

(١) ٢ جا ٩٠° = -٢ جتا ١٨٠°   (٤) قتا ٦٠° ظتا ٣٠° ظا ٦٠° = ٢ قا² ٤٥° جتا ٣٠°

(٢) ٢ جا ٤٥° جتا ٤٥° ظتا ٤٥° = ١   (٥) ظا ٦٠° = ٢ ظا ٣٠° / (١ - ظا² ٣٠°)

(٣) ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠° = جا ٦٠° جتا² ١٨٠° .   (٦) جا ٣٠° = √((١ - جتا ٦٠°) / ٢)

١٠ أوجد قيمة س إذا كان :-

(١) س جا² π/٤ جتا π = ظا² π/٣ جا ٣π/٢   (٢) س جا π/٤ جتا π/٤ ظتا π/٦ = ظا² π/٤ - جا² π/٣

١١ إذا كانت س ∈]٠ ، ٩٠°[أوجد قيمة س في كل مما يأتي

(١) جا س = جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠°   (٢) ٢ جتا θ + ١ = قا² ٤٥° قا² ٦٠° ٣

(٤) " الزوايا المنتسبة "

* الزوايا المنتسبة :- هي الزوايا التي الفرق بين قياسيهما أو مجموع قياسيهما يساوي عددًا صحيحًا من القوائم.

مثلاً :- * الزاويتان ٢٢٠° ، ٤٠° زاويتان منتسبتان لأن ٢٢٠ - ٤٠ = ١٨٠° "قائمتان"

* الزاويتان ٣٠° ، ٦٠° زاويتان منتسبتان لأن ٣٠ + ٦٠ = ٩٠° "قائمة"

---

[1] الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين θ ، (١٨٠° - θ) :-

* جا(١٨٠° - θ) = جا θ * قتا(١٨٠° - θ) = قتا θ
* جتا(١٨٠° - θ) = - جتا θ * قا(١٨٠° - θ) = - قا θ
* ظا(١٨٠° - θ) = - ظا θ * ظتا(١٨٠° - θ) = - ظتا θ

مثال :-
• جا ١٢٠° = جا(١٨٠° - ٦٠°) = جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$
• ظا ١٣٥° = ظا(١٨٠° - ٤٥°) = - ظا ٤٥ = -١
• جتا ١٢٠° = جتا(١٨٠° - ٦٠°) = - جتا ٦٠ = - $\frac{1}{2}$

* تدريب * أوجد ما يأتي :- جا ١٥٠° ، جتا ١٠٠° ، قا ١٢٠° ، قتا ١٣٥°

---

[2] الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين θ ، (١٨٠° + θ).

* جا(١٨٠° + θ) = - جا θ * قتا(١٨٠° + θ) = - قتا θ
* جتا(١٨٠° + θ) = - جتا θ * قا(١٨٠° + θ) = - قا θ
* ظا(١٨٠° + θ) = ظا θ * ظتا(١٨٠° + θ) = ظتا θ

مثال :-
• جا ٢٤٠° = جا(١٨٠° + ٦٠°) = - جا ٦٠ = - $\frac{\sqrt{3}}{2}$
• ظا ٢٢٥° = ظا(١٨٠° + ٤٥°) = ظا ٤٥ = ١
• قا ٢١٠° = قا(١٨٠° + ٣٠°) = - قا ٣٠ = - $\frac{2}{\sqrt{3}}$

* تدريب * أوجد ما يأتي :- جتا $40°$ ، جا $225°$ ، قتا $210°$ ، ظا $210°$

---

٣ الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين θ ، $(360° - \theta)$:-

* جا$(360° - \theta)$ = − جا θ
* قتا$(360° - \theta)$ = − قتا θ
* جتا$(360° - \theta)$ = جتا θ
* قا$(360° - \theta)$ = قا θ
* ظا$(360° - \theta)$ = − ظا θ
* ظتا$(360° - \theta)$ = − ظتا θ

مثال :-

- جا $330°$ = جا$(360° - 30°)$ = − جا $30°$ = $-\frac{1}{2}$
- ظا $315°$ = ظا$(360° - 45°)$ = − ظا $45°$ = -1
- قا $300°$ = قا$(360° - 60°)$ = قا $60°$ = 2

* تدريب * أوجد ما يأتي :- جتا $330°$ ، ظا $300°$ ، قتا $330°$ ، جا $315°$

---

٤ الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين θ ، $-\theta$

* جا$(-\theta)$ = − جا θ
* قتا$(-\theta)$ = − قتا θ
* جتا$(-\theta)$ = جتا θ
* قا$(-\theta)$ = قا θ
* ظا$(-\theta)$ = − ظا θ
* ظتا$(-\theta)$ = − ظتا θ

مثال :-

- جا$(-45°)$ = − جا $45°$ = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$
- جتا$(-60°)$ = جتا $60°$ = $\frac{1}{2}$
- ظتا$(-30°)$ = − ظتا $30°$ = $-\sqrt{3}$

* تدريب * أوجد ما يأتي :- ظا$(-45°)$ ، جتا$(-30°)$ ، قا$(-60°)$

---

٥ الدوال المثلثية للزاويتين θ ، (٩٠° − θ) :-

* جا(٩٠° − θ) = جتا θ   * قتا(٩٠° − θ) = قا θ
* جتا(٩٠° − θ) = جا θ   * قا(٩٠° − θ) = قتا θ
* ظا(٩٠° − θ) = ظتا θ   * ظتا(٩٠° − θ) = ظا θ

مثال :- • جا ٧٠° = جا(٩٠° − ٢٠°) = جتا ٢٠°

• جا ٤٠° / جتا ٥٠° = جا(٩٠° − ٥٠°) / جتا ٥٠° = جتا ٥٠ / جتا ٥٠ = ١

• ظا ١٠° − ظتا ٨٠° = ظا(٩٠° − ٨٠°) − ظتا ٨٠° = ظتا ٨٠° − ظتا ٨٠° = صفر

تدريب أكمل ما يأتي :-

(١) جا ٥٥° = جتا ..... ° ، (٢) قا ٦٥° − قتا ٢٥° = ... ، (٣) ظا ٧٠° / ظتا ٢٠° = ...

---

٦ الدوال المثلثية للزاويتين θ ، (٩٠° + θ) :-

* جا(٩٠° + θ) = جتا θ   * قتا(٩٠° + θ) = قا θ
* جتا(٩٠° + θ) = − جا θ   * قا(٩٠° + θ) = − قتا θ
* ظا(٩٠° + θ) = − ظتا θ   * ظتا(٩٠° + θ) = − ظا θ

مثال :- • جا ١٢٠° = جا(٩٠° + ٣٠°) = جتا ٣٠ = √٣ / ٢

• جتا ١٥٠° = جتا(٩٠° + ٦٠°) = − جا ٦٠ = − √٣ / ٢

• ظتا ١٣٥° = ظتا(٩٠° + ٤٥°) = − ظا ٤٥ = −١

تدريب أوجد ما يأتي :- ظا ١٠٠° ، قتا ١٣٠° ، قا ١٢٠° ، جتا ١٣٥°

مثال :- إذا كانت الزاوية التي قياسها θ في الوضع القياسي ويمر ضلعها النهائي بالنقطة (٧/٢٥ ، ٢٤/٢٥) أوجد الدوال المثلثية جا(٩٠° + θ) ، قا(٩٠° + θ)

الحل :- • جا(٩٠° + θ) = جتا θ = ٧/٢٥ ، • قا(٩٠° + θ) = − قتا θ = − ٢٥/٢٤

٧ الدوال المثلثية للزاويتين θ ، $(270^\circ - \theta)$:-

* جا$(270^\circ - \theta)$ = − جتا θ * قتا$(270^\circ - \theta)$ = − قا θ
* جتا$(270^\circ - \theta)$ = − جا θ * قا$(270^\circ - \theta)$ = − قتا θ
* ظا$(270^\circ - \theta)$ = ظتا θ * ظتا$(270^\circ - \theta)$ = ظا θ

مثال :-

- جا ٢٢٥° = جا$(270^\circ - 45^\circ)$ = − جتا ٤٥ = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$
- ظا ٢٤٠° = ظا$(270^\circ - 30^\circ)$ = ظتا ٣٠ = $\sqrt{3}$
- قتا ٢١٠° = قتا$(270^\circ - 60^\circ)$ = − قا ٦٠ = -2

تدريب أوجد ما يأتي :- قا ٢٤٠° ، قتا ٢٢٥° ، جا ٢١٠°

---

٨ الدوال المثلثية للزاويتين θ ، $(270^\circ + \theta)$:-

* جا$(270^\circ + \theta)$ = − جتا θ * قتا$(270^\circ + \theta)$ = − قا θ
* جتا$(270^\circ + \theta)$ = جا θ * قا$(270^\circ + \theta)$ = قتا θ
* ظا$(270^\circ + \theta)$ = − ظتا θ * ظتا$(270^\circ + \theta)$ = − ظا θ

مثال :-

- جا ٣٠٠° = جا$(270^\circ + 30^\circ)$ = − جتا ٣٠ = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- قا ٣٣٠° = قا$(270^\circ + 60^\circ)$ = قتا ٦٠ = $\frac{2}{\sqrt{3}}$
- ظتا ٣١٥ = ظتا$(270^\circ + 45^\circ)$ = − ظا ٤٥ = -1

تدريب أوجد ما يأتي :- جتا ٣١٥° ، قتا ٣٠٠° ، جا ٣٣٠°

مثال :- أوجد قيمة جتا ٤٨٠° جا(-30°) + ظا ٢٢٥°

الحل :- ∵ جتا ٤٨٠° = جتا$(480^\circ - 360^\circ)$ = جتا ١٢٠° = جتا$(180^\circ - 60^\circ)$ = − جتا ٦٠ = $\boxed{-\frac{1}{2}}$

∵ جا(-30°) = − جا ٣٠° = $\boxed{-\frac{1}{2}}$

∵ ظا ٢٢٥ = ظا$(180^\circ + 45^\circ)$ = ظا ٤٥ = ١ ⇐ ظا ٢٢٥° = $\boxed{1}$

∴ قيمة المقدار جتا ٠٨٠ ج٤ جا (-٣٠°) - ظا٢ ٤٥° = - ١/٢ × - ١/٢ + ١ = ١/٤ + ١ = ٥/٤

"ملحوظة هامة"

(١) يمكن تلخيص ما سبق في الرسمة المقابلة:-

(٢) الدوال المثلثية (٩٠° + θ) ، (٩٠° - θ) ، (٢٧٠° + θ) ، (٢٧٠° - θ) تتغير فيها الدوال المثلثية بوضع حرف التاء في الدالة التي ليس بها حرف التاء والعكس .

"الربع الأول" كل الدوال موجبة: θ ، ٩٠° - θ
"الربع الثاني" جا ، قتا موجبتان: ٩٠° + θ ، ١٨٠° - θ
"الربع الثالث" ظا ، ظتا موجبتان: ١٨٠° + θ ، ٢٧٠° - θ
"الربع الرابع" جتا ، قا موجبتان: ٢٧٠° + θ ، ٣٦٠° - θ

مثال :- أوجد بطريقتين مختلفتين كل مما يأتي :- جا ١٢٠° ، قا ٥π/٣

الحل :-

(١) جا ١٢٠° = جا (٩٠° + ٣٠°)
= جتا ٣٠° = √٣/٢

أو
جا ١٢٠° = جا (١٨٠° - ٦٠°) = جا ٦٠°
= √٣/٢

(٢) قا ٥π/٣ = قا (٥ × ١٨٠)/٣ = قا ٣٠٠°
قا ٣٠٠° = قا (٢٧٠° + ٣٠°)
= قتا ٣٠ = ٢

أو
قا ٣٠٠° = قا (٣٦٠° - ٦٠°) = قا ٦٠°
= ٢

مثال :- بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة :-

جتا (-١٥٠°) جا ٦٠٠° + جتا ٢π/٣ جا ٣٣٠° - قا (-٥π/٤) ظا ٩٠٠°

الحل :-

∵ جتا (-١٥٠°) = جتا ١٥٠° = جتا (١٨٠° - ٣٠°) = - جتا ٣٠° = - √٣/٢

∵ جا ٦٠٠° = جا (٦٠٠° - ٣٦٠°) = جا ٢٤٠° = جا (١٨٠° + ٦٠°) = - جا ٦٠ = - √٣/٢

∵ $جتا(\frac{2\pi}{3}) = جتا(\frac{180 \times 2}{3}) = جتا 120 = جتا(180 - 60) = - جتا 60 = \boxed{-\frac{1}{2}}$

∵ $جا 330° = جا(360° - 30°) = - جا 30° = \boxed{-\frac{1}{2}}$

∵ $قا(-\frac{5\pi}{4}) = قا \frac{5\pi}{4} = قا(\frac{5 \times 180}{4}) = قا 225 = قا(180 + 45) = - قا 45 = \boxed{-\sqrt{2}}$

∵ $ظا 900° = ظا(900° - 2 \times 360°) = ظا 180° = \boxed{صفر}$

∴ قيمة المقدار $= \frac{-\sqrt{3}}{2} \times \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1}{2} \times \frac{-1}{2} - (-\sqrt{2}) \times صفر$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 0 = \boxed{1}$ #

تدريب * بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة :-

(1) $جتا 210° جا 510° - جا 330° جتا(-330°)$

(2) $ظا 600° جتا(-390°) + جا 150° جتا(-240°)$

مثال :- إذا كانت $جتا \theta = \frac{-4}{5}$ حيث $90° < \theta < 180°$ أوجد قيمة ما يأتي

(1) $جا(180° - \theta)$ (3) $جتا(-\theta)$

(2) $قا(360° - \theta)$ (4) $ظا(\theta - 180°)$

الحل :- ∵ لأي نقطة على دائرة الوحدة $س^2 + ص^2 = 1$

∵ $جتا \theta = \frac{-4}{5}$ ⟸ النقطة $(\frac{-4}{5} ، ص)$

⟸ $(\frac{-4}{5})^2 + ص^2 = 1$ ⟸ $\frac{16}{25} + ص^2 = 1$ ⟸ $ص^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

$ص = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} = (\pm \frac{3}{5})$ مرفوض ∵ θ تقع في الربع الثاني ∴ $\boxed{ص = \frac{3}{5}}$

∴ $جا(180° - \theta) = جا \theta = \boxed{\frac{3}{5}}$ ، ∴ $قا(360° - \theta) = قا \theta = \boxed{\frac{-5}{4}}$

∴ $جتا(-\theta) = جتا \theta = \boxed{\frac{-4}{5}}$ ، $ظا(\theta - 180°) = ظا[-(180° - \theta)]$

$= - ظا(180° - \theta) = -(- ظا \theta) = ظا \theta$

$= \boxed{\frac{-3}{4}}$

* تدريب * إذا كان الضلع النهائي للزاوية الموجهة في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (س ، $\frac{12}{13}$) حيث ($90° < \theta < 180°$) أوجد قيمة:-

13 جتا$(360° - \theta)$ + ظا $225°$ + جا $300°$ + 12 ظا$(270° - \theta)$

"ملحوظة هامة جداً"

إذا كان جا α = جتا β أو ظا α = ظتا β أو قا α = قتا β

فإن $\alpha + \beta = 90°$ حيث α ، β زاويتين حادتين موجبتين.

مثال:- إذا كان جا$(3\theta + 8°)$ = جتا$(2\theta - 13°)$ أوجد θ حيث $0° < \theta < 90°$

الحل:-

∵ جا$(3\theta + 8°)$ = جتا$(2\theta - 13°)$ ∴ $3\theta + 8° + 2\theta - 13° = 90°$

∴ $5\theta + 15 = 90°$ ⇐ $5\theta = 75$ ⇐ $\theta = 15°$

⇐ لاحظ أنه توجد قيم أخرى تحقق المعادلة السابقة وتنحصر بين $0°$ ، $90°$ مثل ٩ع ، $87°$ ولإيجاد هذه القيم لابد من حل هذا النوع من المسائل باستخدام القانون العام لتعميم الملاحظة السابقة:-

---

القانون العام لحل المعادلات على الصورة جا α = جتا β أو قا α = قتا β أو ظا α = ظتا β:-

① إذا كان جا α = جتا β فإن: $\alpha \pm \beta = 90° + 360°$ ن أو $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ ن ، ن ∈ ص

② إذا كان قا α = قتا β فإن: $\alpha \pm \beta = 90° + 360°$ ن أو $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ ن ، ن ∈ ص

③ إذا كان ظا α = ظتا β فإن: $\alpha + \beta = 90° + 180°$ ن أو $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \pi$ ن ، ن ∈ ص

مثال :- أوجد الحل العام للمعادلات الآتية :-

(١) جا 4θ = جتا 2θ (٢) قتا 3θ = قا θ

(٣) 2 جا$(\frac{\pi}{2} - \theta) = 1$ (٤) ظتا 5θ = ظا θ

الحل :-

(١) ∵ جا 4θ = جتا 2θ ⟸ $4\theta \pm 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ، $n \in$ ص

إما ⟸ $6\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ بالقسمة على ٦ ⟸ $\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{3}n\pi$

أو $2\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ بالقسمة على ٢ ⟸ $\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$

∴ حل المعادلة هو $\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{3}\pi n$ أو $\frac{1}{4}\pi + \pi n$

---

(٢) ∵ قتا 3θ = قا θ ⟸ $3\theta \pm \theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ، $n \in$ ص

إما $3\theta + \theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ∴ $4\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (÷٤) $\theta = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}\pi n$

أو $3\theta - \theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ∴ $2\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (÷٢) $\theta = \frac{1}{4}\pi + \pi n$

∴ حل المعادلة هو $\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}\pi n$ أو $\frac{1}{4}\pi + \pi n$

---

(٣) ∵ 2 جا$(\frac{\pi}{2} - \theta) = 1$ ⟸ 2 جا$(90 - \theta) = 1$ ⟸ 2 جتا $\theta = 1$ (÷٢)

⟸ جتا $\theta = \frac{1}{2}$ (موجبة) ∴ θ تقع في الربع الأول أو الرابع

الأول ⟸ $\theta = 60^\circ$ الرابع ⟸ $\theta = 360 - 60 = 300^\circ$

∴ حل المعادلة هو 60° أو 300°

---

(٤) ∵ ظا θ = ظتا ٥θ ⇐ θ + ٥θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π ⇐ ٦θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π (÷٦)

θ = $\frac{١}{١٢}\pi$ + $\frac{١}{٦}\pi$ ن

الحل العام هو $\frac{١}{١٢}\pi$ + $\frac{١}{٦}\pi$ ن .

مثال :- أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :-

(١) ٢ حا θ − ١ = ٠ حيث θ ∈ [٠، $\frac{\pi}{٢}$]

(٢) ٢ جتا($\frac{\pi}{٢}$ − θ) + $\sqrt{٣}$ = ٠ حيث θ ∈ [٠، ٢π]

(٣) ٤ جتا² θ − ٣ = ٠ حيث θ ∈ [٠، ٢π]

الحل :-

(١) ∵ ٢ حا θ − ١ = ٠ ⇐ ٢ حا θ = ١ (÷٢) ⇐ حا θ = $\frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع في الربع الأول أو الثاني

الأول ⇐ θ = ٣٠° الثاني ⇐ θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠° "مرفوضة"

∴ م.ح = {٣٠°}

(٢) ٢ جتا($\frac{\pi}{٢}$ − θ) + $\sqrt{٣}$ = ٠ ⇐ ٢ جتا(٩٠ − θ) + $\sqrt{٣}$ = ٠ ⇐ ٢ حا θ + $\sqrt{٣}$ = ٠

⇐ ٢ حا θ = −$\sqrt{٣}$ ⇐ حا θ = −$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (سالبة)

∴ θ تقع في الربع الثالث أو الرابع ∵ الزاوية التي جيبها $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هي ٦٠°

الثالث ⇐ θ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠° الرابع ⇐ θ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

∴ م.ح = {٢٤٠°، ٣٠٠°}

(٣) ∵ ٤ جتا² θ − ٣ = ٠ ⇐ ٤ جتا² θ = ٣ ⇐ جتا² θ = $\frac{٣}{٤}$ ⇐ جتا θ = ± $\sqrt{\frac{٣}{٤}}$

∴ جتا θ = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

إما جتا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع في الربع الأول والرابع

∴ θ = ٣٠° أو θ = ٣٦٠° − ٣٠° = ٣٣٠°

أو جتا θ = −$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (سالبة)

∴ θ تقع في الربع الثاني أو الثالث

∴ θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠° أو θ = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°

∴ م.ح = {٣٠°، ٣٣٠°، ١٥٠°، ٢١٠°}

تمارين على الزوايا المنتسبة

1 أكمل ما يأتي :-

(1) جتا$(180° - \theta)$ = ... (2) ظتا$(90° - \theta)$ = ...

(3) قا$(270° + \theta)$ = ... (4) قتا$(360° - \theta)$

(5) حا $25°$ = جتا ....° (6) ظا $42°$ = ظتا ....°

(7) جتا 67 = جا ....° (8) قتا 13 = قا ....°

(9) إذا كانت ظتا θ = ظا θ حيث $0° < \theta < 90°$ فإن ق$(\hat{\theta})$ = ...°

(10) إذا كانت حا 5θ = جتا 4θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن θ = ...°

(11) إذا كان قا θ = قا$(90° - \theta)$ فإن ظتا θ = ...

(12) إذا كان جتا θ = جا 2θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن جا 3θ = ...

(13) إذا كان ظا$(180° + \theta)$ = 1 حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن ق$(\hat{\theta})$ = ...°

(14) إذا كان جا α = جتا β حيث α ، β زاويتان حادتان فإن ظا$(\alpha + \beta)$ = ...

(15) إذا كان حا 2θ = جتا 4θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن ظا$(90° - 3\theta)$ = ...

(16) إذا كان جتا$(90° + \theta)$ = $\frac{1}{2}$ حيث θ أصغر زاوية موجبة فإن ق$(\hat{\theta})$ = ...°

2 أوجد قيمة ما يأتي :-

(1) حا $150°$ جتا$(-300°)$ + جتا $930°$ ظتا $240°$

(2) ظا $\frac{2\pi}{3}$ قا $\frac{11\pi}{3}$ + ظتا $\frac{11\pi}{6}$ قتا $\frac{19\pi}{6}$ + ظا $\frac{5\pi}{6}$ قتا$(\frac{-19\pi}{3})$

3 أثبت أن :- حا $600°$ جتا$(-30°)$ + حا $150°$ جتا$(-240°)$ = -1

4 إذا كان الضلع النهائي لزاوية قياسها θ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{-3}{5} ، \frac{4}{5})$ أوجد :-

(1) جا$(180° + \theta)$ ، (2) جتا$(\frac{\pi}{2} - \theta)$ ، (3) ظا$(360° - \theta)$ ، (4) قتا$(\frac{3\pi}{2} - \theta)$

٥ أوجد إحدى قيم θ حيث $٠° < \theta < ٩٠°$ التي تحقق كل مما يأتي :-

(١) $\text{جا}(٣\theta + ١٥°) = \text{جتا}(٢\theta - ٥°)$ (٣) $\text{ظا}(\theta + ٢٠°) = \text{ظتا}(٣\theta + ٣٠°)$

(٢) $\text{قا}(\theta + ٥°) = \text{قتا}(\theta + ١٥°)$ (٤) $\text{جتا}(\frac{\theta}{٢} + ٢٠°) = \text{جا}(\frac{\theta}{٢} + ٤٠°)$

٦ أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :-

(١) $\text{جا}\,٢\theta = \text{جتا}\,\theta$ ، (٢) $\text{جتا}\,٥\theta = \text{جا}\,\theta$ ، (٣) $\text{جا}(٤\theta + ٤٨°) = \text{جتا}(\theta - ٣٢°)$

٧ أوجد جميع قيم θ حيث $\theta \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$ التي تحقق كل مما يأتي :-

(١) $\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta = ٠$ (٣) $٢\,\text{جتا}\,\theta - ١ = ٠$

(٢) $\text{قتا}(\theta - \frac{\pi}{٦}) = \text{قا}\,\theta$ (٤) $٢\,\text{جتا}(\frac{\pi}{٢} - \theta) = ١$

٨ إذا كان $\text{جتا}(\frac{٣\pi}{٢} - \theta) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\text{جا}(\frac{\pi}{٢} + \theta) = \frac{١}{٢}$

أوجد أصغر قياس موجب للزاوية θ .

٩ إذا كانت الزاوية θ مرسومة في الوضع القياسي حيث $\text{ظتا}\,\theta = -١$ ، $\text{قتا}\,\theta = \sqrt{٢}$

فهل يمكن أن يكون $ق(\hat{\theta}) = \frac{٣\pi}{٤}$ ؟ فسر إجابتك .

١٠ "**للمتفوقين**" أوجد قيمة كل مما يأتي

(١) $\text{جتا}\,٢٠° + \text{جتا}\,٤٠° + \text{جتا}\,٦٠° + \text{----} + \text{جتا}\,١٦٠° + \text{جتا}\,١٨٠°$

(٢) $\text{جا}\,١° + \text{جا}\,٢° + \text{جا}\,٣° + \text{......} + \text{جا}\,٣٥٨° + \text{جا}\,٣٥٩°$

(٥) "التمثيل البياني للدوال المثلثية"

٤ دالة الجيب :-

لتمثيل الدالة د حيث $د(\theta) = جا\theta$ نكون جدول منه لبعض قيم θ الخاصة حيث $\theta \in [٠ ، ٢\pi]$ وقيم $جا\theta$ المناظرة لها.

θ	٠	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
$جا\theta$	٠	١	٠	١-	٠

نرسم منحنى الدالة كما بالشكل :-

* خواص دالة الجيب :-

(١) الدالة دورية وطول دورتها ٢π.

(٢) مجال الدالة = $]-\infty ، \infty[$ ومدى الدالة = $[-١ ، ١]$

(٣) القيمة العظمى للدالة تساوي ١ وذلك عندما $\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$

(٤) القيمة الصغرى للدالة تساوي ١- وذلك عندما $\theta = \frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi ن$ ، $ن \in ص$

---

٥ دالة جيب التمام :-

لتمثيل الدالة د حيث $د(\theta) = جتا\theta$ نكون جدول منه لبعض قيم θ الخاصة حيث $\theta \in [٠ ، ٢\pi]$ وقيم $جتا\theta$ المناظرة لها.

θ	٠	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
$جتا\theta$	١	٠	١-	٠	١

نرسم منحنى الدالة كما بالشكل :-

* خواص دالة جيب التمام :-

(١) الدالة دورية وطول دورتها ٢π.

(٢) مجال الدالة =]$-\infty$ ، ∞[ومدى الدالة = [-1 ، 1]

(٣) القيمة العظمى للدالة تساوي ١ وذلك عندما $\theta = \pm 2\pi n$

(٤) القيمة الصغرى للدالة تساوي -1 وذلك عندما $\theta = \pi \pm 2\pi n$ ، $n \in$ ص

"ملحوظة هامة"

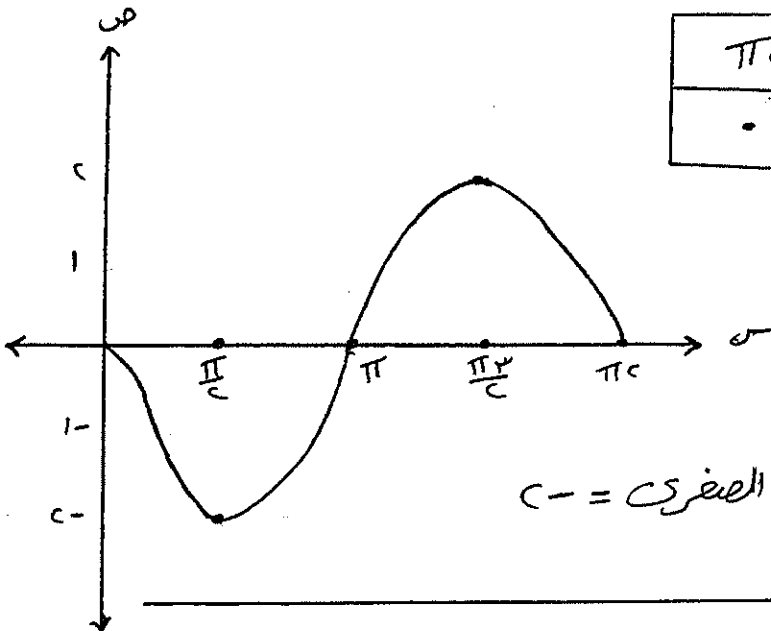
كل من الدالتين: ص = أ جا ب س ، ص = أ جتا ب س دوال دورية ودورتها $\frac{2\pi}{|ب|}$ ومداها [$-$أ ، أ] حيث أ موجبة.

مثال:- • الدالة د(θ) = ٥ جا θ مداها [-5 ، 5] ودورتها $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

• الدالة د(θ) = ٣ جتا ٢θ مداها [-3 ، 3] ودورتها $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

مثال:- ارسم منحنى الدالة د(θ) = ٢ جا ٣θ على الفترة [٠ ، 2π]

الحل:-

θ	٠	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
٢ جا ٣θ	٠	-2	٠	٢	٠

الدالة دورية ودورتها $\frac{2\pi}{3}$

المجال =]$-\infty$ ، ∞[

المدى = [-2 ، 2]

القيمة العظمى للدالة = ٢ ، القيمة الصغرى = -2

---

* تدريب * ارسم منحنى الدالة د(θ) = $\frac{1}{2}$ جتا ٢θ في الفترة [٠ ، π]

تمارين على " رسم الدوال المثلثية "

1 أكمل ما يأتي :-

(١) مدى الدالة د حيث د(θ) = جا θ هو .... وطول دورتها ....

(٢) مدى الدالة د حيث د(θ) = ٢ جا θ هو .... وطول دورتها ....

(٣) القيمة العظمى للدالة ع : ع(θ) = ٤ جا θ هو ....

(٤) القيمة الصغرى للدالة ع : ع(θ) = ٥ جتا θ هو ....

(٥) الدالة د(θ) = ٢ جا ٤ θ دالة دورية ودورتها تساوي ....

2 ارسم الشكل البياني لكل من الدوال الآتية حيث $\theta \in$ [٠ ، ٢ط]

وعين القيمة العظمى والصغرى والمدى لكل من الدوال الآتية

(١) د(θ) = جا θ

(٢) ص = $\frac{1}{2}$ جا θ

(٣) ص = ٣ جتا θ

(٤) ص = $\frac{3}{2}$ جتا θ

(٥) ص = ٣ جا ٣ θ

(٦) ص = ٦ جا(٥ θ) + ١٠

(٦) "إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية"

* إذا كانت ص = حا θ فإنه يمكن إيجاد قيمة ص بمعلومية θ

مثلاً :- إذا كانت θ = ٣٠° ⇐ ص = جا ٣٠° = $\frac{1}{2}$

"والسؤال هنا" هل يمكن إيجاد θ بمعلومية ص ؟!!

⇐ هناك صورة تستخدم لإيجاد θ بمعلومية ص :-

فإذا كانت ص = حا θ ⇐ θ = حا$^{-1}$ ص

مثلاً :- إذا كانت ص = $\frac{1}{2}$ ⇐ حا θ = $\frac{1}{2}$ فإن θ = حا$^{-1}$ $\frac{1}{2}$

"أي نبحث عن الزاوية الحادة الموجبة التي جيبها يساوي $\frac{1}{2}$ وهي ٣٠°

وتكتب على الحاسبة بالصورة :- on ⇒ shift sin ($\frac{1}{2}$) = 30°

مثال ① :- أوجد قيمة θ حيث ٠° < θ < ٣٦٠° والتي تحقق كل مما

(١) حا$^{-1}$ (٠,٩٦٦٩)   (٣) ظا$^{-1}$ $\sqrt{3}$ (٥) قا$^{-1}$ ٢

(٢) جتا$^{-1}$ ($\frac{1}{2}$)   (٤) حا$^{-1}$ ($-\frac{1}{2}$)   (٦) ظتا$^{-1}$ (-٢,٠٤٦٦)

الحل :-

(٢) ∵ جيب تمام الزاوية موجب   ∴ θ تقع في الربع الأول أو الرابع

الأول ⇐ θ = ٦٠°   الرابع ⇐ θ = ٣٦٠° - ٦٠° = ٣٠٠°

∴ قيم θ = ٦٠° أ ٣٠٠°

(٣) ∵ ظل الزاوية موجب   ∴ θ تقع في الربع الأول أو الثالث

الأول ⇐ θ = ٦٠°   الثالث ⇐ θ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

∴ قيم θ = ٦٠° أ ٢٤٠°

(ع) ∵ جيب الزاوية سالب ∴ θ تقع في الربع الثالث أو الرابع

الثالث ⇐ $\theta = ١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠^\circ$ ، الرابع ⇐ $\theta = ٣٦٠ - ٣٠ = ٣٣٠^\circ$

∴ قيم $\theta = ٢١٠^\circ$ أو ٣٣٠°

(ه) ∵ $\theta = قا^{-1} \sqrt{٢} \Leftarrow \theta = جتا^{-1} \frac{١}{\sqrt{٢}}$

∵ جيب تمام الزاوية موجب ∴ θ تقع في الربع الأول أو الرابع

الأول ⇐ $\theta = ٤٥^\circ$ ، الرابع ⇐ $\theta = ٣٦٠ - ٤٥ = ٣١٥^\circ$

∴ قيم $\theta = ٤٥^\circ$ أو ٣١٥°

(و) ∵ جيب الزاوية موجب ∴ θ تقع في الربع الأول أو الثاني

الأول ⇐ $\theta = ١٤َ\ ٧٥^\circ$ ، الثاني ⇐ $\theta = ١٨٠ - ١٤َ\ ٧٥^\circ = ٤٦َ\ ١٠٤^\circ$

(٦) ∵ ظل تمام الزاوية سالب ∴ θ تقع في الربع الثاني أو الرابع

باستخدام الحاسبة ⇐ shift tan(1.6204 x^{-1}) = °''' = $٣١^\circ\ ٤٠َ\ ٤٨ً$

الثاني ⇐ $\theta = ١٨٠ - ٣١^\circ\ ٤٠َ\ ٤٨ً = ١٤٨^\circ\ ١٩َ\ ١٢ً$ ، الرابع ⇐ $\theta = ٣٦٠ - ٣١^\circ\ ٤٠َ\ ٤٨ً = ٣٢٨^\circ\ ١٩َ\ ١٢ً$

∴ قيم $\theta = ١٤٨^\circ\ ١٩َ\ ١٢ً$ أو $٣٢٨^\circ\ ١٩َ\ ١٢ً$

تدريب أوجد θ حيث $٠^\circ < \theta < ٣٦٠^\circ$ والتي تحقق كل مما

(١) $جا^{-1} \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (٣) $جتا^{-1}$ ٠و١٥٤٨

(٢) $قتا^{-1}(-٢)$ (٤) $ظتا^{-1}$ ١و٦٢٠٤

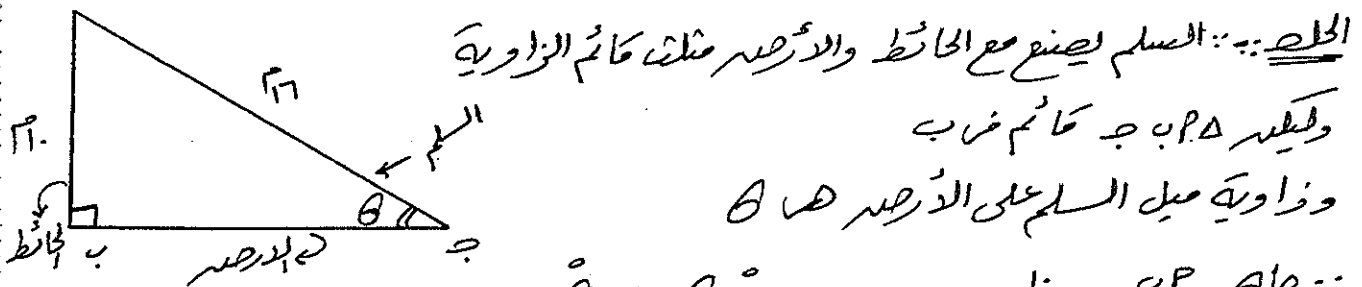
مثال ②: إذا قطع الضلع النهائي لزاوية موجبة قياسها θ في وضعها القياسي دائرة الوحدة في النقطة ب $(\frac{-٣}{٥} ، \frac{٤}{٥})$ فأوجد θ حيث $٠^\circ < \theta < ٣٦٠^\circ$

الحل: ∵ النقطة ب $(\frac{-٣}{٥} ، \frac{٤}{٥})$ تقع في الربع الثاني لأنه س < ٠ ⊖ ، ص > ٠ ⊕

∵ الزاوية الموجهة θ تقع في الربع الثاني

∵ جا θ = ص = $\frac{4}{5}$ ⇐ θ = جا$^{-1}$ $\frac{4}{5}$ = $53^\circ\ 7'\ 48''$

∴ $\theta = 180^\circ - 53^\circ\ 7'\ 48'' = 126^\circ\ 52'\ 12''$.

مثال ③ سلم طوله ١٦ متر يستند على حائط رأسي وأرض أفقية فإذا كان ارتفاع السلم عن سطح الأرض يساوي ١٠ متر أوجد بالراديان زاوية ميل السلم على الأرض

الحل :- ∵ السلم يصنع مع الحائط والأرض مثلث قائم الزاوية

وليكن △ أ ب جـ قائم في ب

وزاوية ميل السلم على الأرض هي θ

∵ جا θ = $\frac{أب}{أجـ} = \frac{10}{16}$ ∵ $0^\circ < \theta < 90^\circ$

∴ $\hat{\theta}$ = جا$^{-1}$ $\frac{10}{16} \simeq 38^\circ\ 40'\ 55''$

∴ $\theta^{rad} = \theta^\circ \times \frac{\pi}{180} \Leftarrow \theta^{rad} = 38^\circ\ 40'\ 55'' \times \frac{\pi}{180} \simeq 0.68^{rad}$ #

تمارين على " إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى النسب المثلثية "

١ أكمل :-

(١) إذا كان جا θ = ٠,٣٤٢٠ حيث θ حادة موجبة فإن ق($\hat{\theta}$) = ...°

(٢) إذا كان ظا θ = ١,٨ وكانت $90^\circ < \theta \leq 360^\circ$ فإن ق($\hat{\theta}$) = ...°

٢ إذا كانت $0^\circ < \theta < 360^\circ$ فأوجد θ التي تحقق كلاً مما يأتي :-

(١) جا$^{-1}$ ٠,٨٦٦٠٣ (٢) جتا$^{-1}$ (−٠,٦٤٢) (٣) ظا$^{-1}$ (−٢,١٤٥٠٦)

٣ إذا قطع الضلع النهائي للزاوية θ في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ أوجد ق($\hat{\theta}$) حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$

٤ سلم طوله ٥م يستند على حائط رأسي فإذا كان ارتفاع السلم عن سطح الأرض ٣م أوجد بالراديان زاوية ميل السلم على الأفقي .

تمارين عامة

أجب عن الأسئلة الآتية مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين:

(١) حوِّل الزوايا الآتية من درجات إلى راديان:

(أ) $120°$ .... (ب) $64{,}8°$ .... (جـ) $22°\ 36'$ ....

(٢) حول الزوايا الآتية من راديان إلى درجات:

(أ) $\frac{5\pi}{3}$ .... (ب) $-\frac{3\pi}{2}$ .... (جـ) $1{,}12$ ء ....

(٣) θ زاوية مركزية فى دائرة طول نصف قطرها نق وتحصر قوسًا طوله ل:

(أ) إذا كان نق = ٨ سم، $\theta = 1{,}2$ ء أوجد ل. ....

(ب) إذا كان ل = ٢٦ سم، نق = ١٨ سم أوجد θ بالدرجات. ....

(٤) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي:

(أ) ظا $120°$ (ب) جا $(\frac{13\pi}{6})$ (جـ) جتا $330°$ (د) ظتا $(-300°)$ (هـ) قتا $(\frac{\pi}{3})$

....

(٥) أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ إذا كان الضلع النهائى مرسومًا فى الوضع القياسى ويمر بكل نقطة من النقاط الآتية:

(أ) $(4، 3)$ (ب) $(-5، -12)$ (جـ) $(-\frac{3}{2}، -2)$ (د) $(-\sqrt{5}، 2)$

....

(٦) (أ) أثبت أن:

أولًا: جا $60° = 2$ جا $30°$ جتا $30°$ ثانيًا: جتا $300° = 2$ جا^2 $60° - 1$

(ب) إذا كانت جتا $\theta = -\frac{4}{5}$ حيث $90° < \theta < 180°$ فأوجد قيمة كل من:

أولًا: جا $(180° - \theta)$ ثانيًا: ظا $(\theta - 180°)$

....

(٧) أوجد قياس الزوايا بالدرجات فى الفترة $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$ لكل مما يأتي:

(أ) ظا$^{-1}$ ١ (ب) جا$^{-1}$ $(\frac{1}{2})$ (جـ) جتا$^{-1}$ $(\frac{\sqrt{3}}{2})$ (د) ظا$^{-1}$ $(-\sqrt{3})$

....

(٨) منحدرًا طوله ٢٤ مترًا، وارتفاعه عن سطح الأرض ٩ أمتار، اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد قياس زاوية ميل المنحدر مع الأرض الأفقية، ثم أوجد قياسها. ....

اختبار الوحدة

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه.

① الزاوية ٥٨٥° تكافيء فى الوضع القياسي الزاوية التى قياسها:

(أ) ٤٥° (ب) ١٣٥° (جـ) ٢٢٥° (د) ٣١٥°

② إذا كان جاθ < ٠، ظا θ > ٠ فإن زاوية تقع θ فى الربع:

(أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

③ إذا كانت θ زاوية حادة وكان جا (θ + ٢٠°) = جتا ٣٠° فإن ق (∠ θ) تساوى:

(أ) ٢٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٠° (د) ٥٠°

④ الزاوية (−٨٥٠°) تقع فى الربع:

(أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

⑤ قياس الزاوية بالدرجات التى تقابل قوسًا طوله ٦π فى دائرة طول نصف قطرها ٩سم تساوى:

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

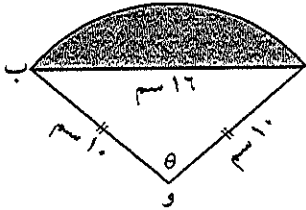
⑥ أبسط صورة للمقدار: جتا (١٨٠° + θ) + جا (٩٠° + θ) يساوى:

(أ) ٠ (ب) ٢ (جـ) ٢ جتا θ (د) ٢ جا θ

⑦ ظا (−٣٠°) تساوى:

(أ) $-\sqrt{3}$ (ب) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (جـ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (د) $\sqrt{3}$

أجب عن الأسئلة الآتية:

⑧ $\overset\frown{أب}$ قوس فى دائرة مركزها و وطول نصف قطرها ١٠ سم ، أب = ١٦ سم.
أوجد θ بالقياس الدائرى ثم أوجد طول القوس $\overset\frown{أب}$:

⑨ إذا كان ٥ جا أ = ٤ حيث ٩٠° < أ < ١٨٠°
فأوجد قيمة المقدار جا (١٨٠° − أ) +ظا (٣٦٠° − أ) +٢جا (٢٧٠° − أ)

⑩ أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار: جا ١٢٠° جتا٣٣٠° − جتا ٤٢٠° جا (−٣٠°).

⑪ اوجد بالرديان ق (∠ أ) إذا كان ٢ جتا أ + $\sqrt{3}$ = ٠ حيث أ قياس زاوية حادة.

⑫ إذا كان الضلع النهائي للزاوية فى الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{1}{2}$) فأوجد قيمة كل من: ظاθ ، قاθ

⑬ أوجد الدوال المثلثية الأساسية للزاوية θ إذا كان الضلع النهائي مرسومًا فى الوضع القياسي ويمر بالنقطة (٦، −٨)

اختبار تراكمي

أولاً: أسئلة الاختيار من متعدد

(١) أى من الزوايا الآتية يكون الجيب وجيب التمام لها سالبين :

(أ) $٤٠°$ (ب) $١٤٠°$ (ج) $٢٢٠°$ (د) $٣٢٠°$

(٢) قياس الزاوية المركزية التى تقابل قوسًا طوله ٢π فى دائرة طول نصف قطرها ٦ سم يساوى :

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (ج) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

(٣) إذا كان ظا ٤θ = ظتا٢θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن جا$(٩٠° - \theta)$ تساوى :

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) ١

ثانيا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(٤) إذا كان الضلع النهائى للزاوية θ فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $(\frac{١}{٢}، \frac{\sqrt{٣}}{٢})$ فأوجد قيمة كل من ظتا θ، قتاθ.

(٥) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد (إن أمكن ذلك) قيمة كل من :

(أ) جتا $٢١٠°$ (ب) جا $(-١٣٥°)$ (ج) قا $\frac{٣\pi}{٢}$ (د) ظتا $(-\frac{٢\pi}{٣})$

(٦) إذا كان الضلع النهائى للزاوية $(٩٠° - \theta)$ حيث θ زاوية حادة موجبة، يقطع دائرة طول نصف قطرها ٥ وحدات طول فى النقطة (٤ ، ك) فأوجد :

(أ) قيمة ك (ب) جا $(٩٠° - \theta)$ (ج) جتا $(٩٠° - \theta)$ (د) ق$(\angle \theta)$

(٧) دراجات: يصعد كريم بدراجته منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية قياسها ١٥٥° فى الوضع القياسى

(أ) اكتب دالة مثلثية تبين العلاقة بين أ وطول المنحدر.

(ب) أوجد قيمة أ لأقرب عددين عشريين.

الإبداع

في الرياضيات

ثالثا:

الهندسة

الوحدة الثالثة (التشابه)

١) تشابه المضلعات

٢) تشابه المثلثات

٣) تابع تشابه المثلثات

٤) العلاقة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين

٥) تطبيقات التشابه في الدائرة

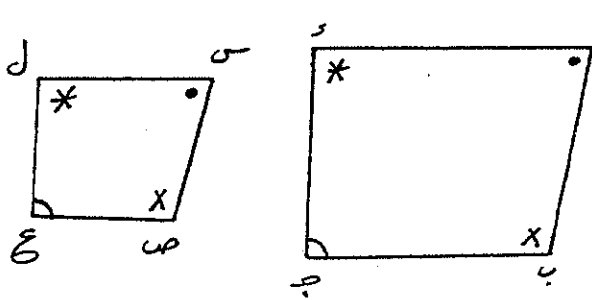
تمارين عامة علي الوحدة

اختبار الوحدة

(١) تشابه المضلعات

تعريف :-

يقال لمضلعين (لهما نفس العدد من الأضلاع) أنهما متشابهان إذا تحقق الشرطين الآتيين معًا :-

(١) الزوايا المتناظرة متساوية في القياس (متطابقة).

(٢) أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة.

* من الشكل المقابل :- إذا كان :-

① ق(∠أ) = ق(∠س) ، ق(∠ب) = ق(∠ص)
، ق(∠جـ) = ق(∠ع) ، ق(∠د) = ق(∠ل)

② $\frac{أب}{س ص} = \frac{ب جـ}{ص ع} = \frac{جـ د}{ع ل} = \frac{د أ}{ل س}$.

فإن المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل "والعلامة ~ تعني التشابه"

"ملاحظات هامة"

① يجب كتابة المضلعين المتشابهين بنفس ترتيب رؤوسهما المتناظرة.

فإذا كان المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل فإن

∠أ ≡ ∠س ، ∠ب ≡ ∠ص ، ∠جـ ≡ ∠ع ، ∠د ≡ ∠ل

، $\frac{أب}{س ص} = \frac{ب جـ}{ص ع} = \frac{جـ د}{ع ل} = \frac{أ د}{س ل}$ = ك "معامل التشابه"

• ويكون معامل تشابه المضلع أ ب جـ د للمضلع س ص ع ل = ك .

• أما معامل تشابه المضلع س ص ع ل للمضلع أ ب جـ د = $\frac{1}{ك}$. ← "خد بالك"

② لكي يتشابه مضلعين يجب توافر الشرطين معًا ولا يكفي توافر أحدهما دون الآخر.

مثلا :- • المربع والمستطيل مضلعان غير متشابهان (لماذا؟)

• المربع والمعين مضلعان غير متشابهان (لماذا؟)

• ليست جميع المستطيلات متشابهة وكذلك المعينات ومتوازيات الأضلاع

③ المضلعات المتطابقة متشابهان ويكون معامل التشابه = ١ (مهمة)

④ المضلعان المشابهان لثالث متشابهان .

⑤ أي مضلعين منتظمين لهما نفس العدد من الأضلاع متشابهان .

مثلا :- • جميع المثلثات المتساوية الأضلاع متشابهة

• جميع المربعات متشابهة • جميع الأشكال الخماسية المنتظمة متشابهة وهكذا....

⑥ إذا كان المضلع $م_١$ ~ المضلع $م_٢$ فإن $\frac{\text{محيط المضلع } م_١}{\text{محيط المضلع } م_٢}$ = معامل التشابه

أي أن :- النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين = النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما (مهمة جداً)

⑦ لكن ك هو معامل تشابه المضلع $م_١$ للمضلع $م_٢$

* إذا كان ك > ١ فإن المضلع $م_١$ هو تكبير للمضلع $م_٢$.

* إذا كان ٠ < ك < ١ فإن المضلع $م_١$ هو تصغير للمضلع $م_٢$.

* إذا كان ك = ١ فإن المضلع $م_١$ يطابق المضلع $م_٢$.

مثال ① :- في الشكل المقابل :-

المضلع أ ب جـ د ~ المضلع هـ و ز ح

(١) أوجد معامل تشابه المضلع أ ب جـ د للمضلع هـ و ز ح

(٢) أوجد قيم س ، ص

(٣) إذا كان محيط المضلع أ ب جـ د = ٥٠ سم . أوجد محيط المضلع هـ و ز ح .

(الشكل: المضلع أ ب جـ د فيه جـ د = ١٥ سم ، أ د = ١٢ سم ، أ ب = (ص + ٢) ؛ المضلع هـ و ز ح فيه ز ح = س سم ، ح هـ = ٨ سم ، هـ و = ٦ سم)

الحل :- ∵ المضلع أ ب جـ د ~ المضلع هـ و ز ح

فيكون $\frac{أب}{هو} = \frac{بجـ}{وز} = \frac{جـد}{زح} = \frac{أد}{حهـ}$ = معامل التشابه

⇐ $\frac{ص+٢}{٦} = \frac{بجـ}{وز} = \frac{١٥}{س} = \frac{١٢}{٨}$ ⇐ معامل التشابه = $\frac{١٢}{٨}$ = $\boxed{\frac{٣}{٢}}$

∵ $\frac{١٥}{س} = \frac{١٢}{٨}$ ⟸ س = $\frac{٨ \times ١٥}{١٢}$ = ١٠ سم ، $\frac{ص + ٢}{٦} = \frac{١٢}{٨}$ ⟸ ص + ٢ = $\frac{٦ \times ١٢}{٨}$ = ٩

∴ ص + ٢ = ٩ ⟸ ص = ٧ سم

∵ $\frac{\text{محيط المضلع أ ب جـ د}}{\text{محيط المضلع هـ و ز ح}}$ = معامل التشابه ⟸ $\frac{٤٥}{\text{محيط المضلع هـ و ز ح}} = \frac{٣}{٢}$

∴ محيط المضلع هـ و ز ح = $\frac{٢ \times ٤٥}{٣}$ = ٣٠ سم .

تدريب * في الشكل المقابل : المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل

(١) أحسب : ق(∠ ش) ، طول س ل

(٢) إذا كان محيط المضلع أ ب جـ د = ٨٠ سم

أحسب محيط المضلع س ص ع ل .

مثال ② : مضلعان متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ من السنتيمترات والآخر محيطه ٤٨ سم . أوجد أطوال أضلاع المضلع الثاني .

الحل : نفرض أن المضلعان هما أ ب جـ د هـ ، س ص ع ل م

بحيث أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٥ سم ، جـ د = ٦ سم ، د هـ = ٨ سم ، أ هـ = ١٠ سم

ومحيط المضلع س ص ع ل م = ٤٨ سم

∵ المضلع أ ب جـ د هـ ~ المضلع س ص ع ل م

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{ل م}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{س م}} = \frac{\text{محيط المضلع أ ب جـ د هـ}}{\text{محيط المضلع س ص ع ل م}}$ « خواص التناسب »

⟸ $\frac{٣}{\text{س ص}} = \frac{٥}{\text{ص ع}} = \frac{٦}{\text{ع ل}} = \frac{٨}{\text{ل م}} = \frac{١٠}{\text{س م}} = \frac{٣ + ٥ + ٦ + ٨ + ١٠}{٤٨} = \frac{٣٢}{٤٨} = \boxed{\frac{٢}{٣}}$

∴ س ص = $\frac{٣ \times ٣}{٢}$ = ٤,٥ ، ص ع = $\frac{٥ \times ٣}{٢}$ = ٧,٥ سم ، ع ل = ٩ سم ، ل م = ١٢ سم ، س م = ١٥ سم

#

مثال (٣) :- أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ٨ سم ، أوجد بعدي مستطيل آخر مشابه له إذا كان :- أ- معامل التشابه = ١,٤ ب- معامل التشابه = ٠,٦

الحل :- (أ) ∵ معامل التشابه = ١,٤ ∴ المستطيل س ص ع ل هو تكبير للمستطيل أ ب جـ د

مع العلم أننا فرضنا المستطيل الآخر س ص ع ل

لفرض المستطيل س ص ع ل ~ المستطيل أ ب جـ د فيكون :-

$\frac{س ص}{أ ب} = \frac{ص ع}{ب جـ} = \frac{ع ل}{جـ د} = \frac{س ل}{أ د}$ = معامل التشابه ⇐ $\frac{س ص}{٥} = \frac{ص ع}{٨} = ١,٤$

∴ س ص = ١,٤ × ٥ = ٧ سم ، ص ع = ١,٤ × ٨ = ١١,٢ سم

(ب) ∵ معامل التشابه = ٠,٦ ∴ المستطيل س ص ع ل هو تصغير للمستطيل أ ب جـ د

⇐ $\frac{س ص}{٥} = \frac{ص ع}{٨} = ٠,٦$ ⇐ س ص = ٣ سم ، ص ع = ٤,٨ سم

المستطيل الذهبي :- هو مستطيل يمكن تقسيمه إلى مربع ومستطيل آخر مشابه للمستطيل الأصلي ، بشرط يكون طوله أصغر من ضعف عرضه وتسمى النسبة الثابتة بين طول المستطيل الذهبي إلى عرضه "بالنسبة الذهبية" . والنسبة الذهبية هي ١,٦١٨ : ١ تقريباً

مثال (٤) :- (١) إذا كان بعدا مستطيل ٢٤,٧ سم ، ٤٠ سم فهل هذا المستطيل يقترب من الذهبي ؟

(٢) ما هو طول مستطيل ذهبي عرضه يساوي ٥ سم لأقرب سنتيمتر ؟

(٣) ما عرض مستطيل ذهبي طوله ١٩٤ سم لأقرب سنتيمتر ؟

(٤) هل جميع المستطيلات الذهبية متشابهة ؟

الحل :- (١) $\frac{الطول}{العرض} = \frac{٤٠}{٢٤,٧} ≃ ١,٦١٧$ ∴ هذا المستطيل يقترب من المستطيل الذهبي

(٢) ∵ $\frac{الطول}{العرض} = ١,٦١٨$ ⇐ $\frac{الطول}{٥} = ١,٦١٨$ ⇐ الطول ≃ ٨ سم

(٣) ∵ $\frac{الطول}{العرض} = ١,٦١٨$ ⇐ $\frac{١٩٤}{العرض} = ١,٦١٨$ ⇐ العرض ≃ ١٢٠ سم

(٤) نعم ، جميع المستطيلات الذهبية متشابهة (لماذا ؟؟)

تماريں على "تشابه مضلعين"

١ أكمل ما يأتي :-

(١) المضلعان المشابهان لثالث ....

(٢) أي مضلعين منتظمين لهما نفس العدد من الأضلاع يكونان ....

(٣) إذا كان معامل التشابه لمضلعين = ١ فإن المضلعين ....

(٤) المثلثان المتساويان الأضلاع ....

(٥) مستطيل ذهبي عرضه ٧ سم فإن طوله ....سم

(٦) إذا كانت النسبة بين طولي ضلعين متناظرين من مضلعين متشابهين ٣ : ٢ فإن النسبة بين محيطيهما ....

(٧) مضلعان متشابهان النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما ٣ : ٤ فإذا كان محيط المضلع الأصغر ١٥ سم فإن محيط المضلع الأكبر ....سم .

(٨) إذا كان المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل فإن :-

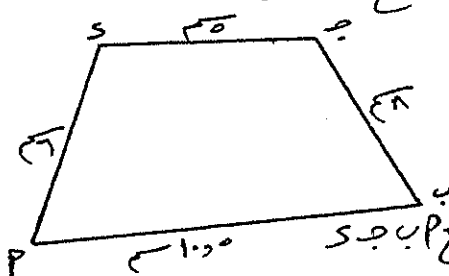
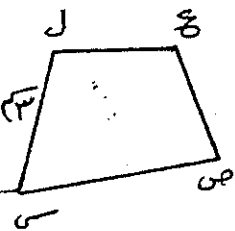
* $\frac{أب}{ب جـ} = \frac{......}{ص ع}$ ، * أب × ع ل = س ص × .....

* $\frac{ب جـ + ص ع}{ص ع} = \frac{..... + ل س}{ل س}$ ، * $\frac{محيط المضلع .....}{محيط المضلع .....} = \frac{س ص}{أ ب}$

---

٢ من الشكل المقابل :- المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل

فإذا كان أ ب = ١٠,٥ سم ، ب جـ = ٨ سم

، جـ د = ٥ سم ، د أ = ٦ سم ، ل س = ٣ سم

أوجد :- (١) معامل تشابه المضلع س ص ع ل للمضلع أ ب جـ د

(٢) س ص ، ص ع ، ع ل

٣ مستطيل بعداه ١٠ سم ، ٦ سم أوجد محيط ومساحة مستطيل آخر مشابه له إذا كان أ- معامل التشابه = ٣ ، ب- معامل التشابه = ٠,٧

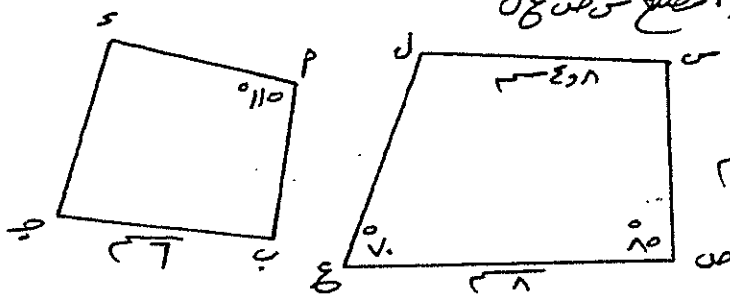
④ في الشكل المقابل :- المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل

(١) أحسب ق(∠ س ل ع) ، طول أ د

(٢) إذا كان محيط المضلع أ ب جـ د = ١٩,٥ سم

أوجد محيط المضلع س ص ع ل .

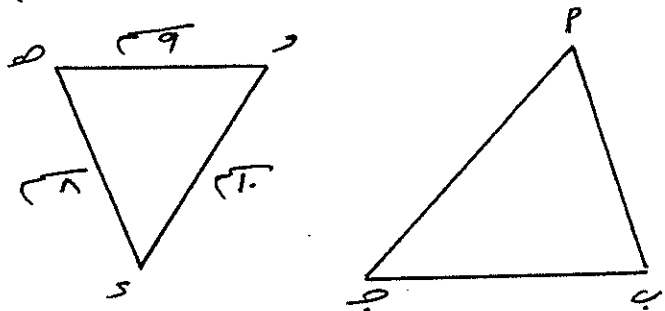
⑤ المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل فإذا كان أ ب = ٣٢ سم ، ب جـ = ٤٠ سم

س ص = ٣م - ١ ، ص ع = ٣م + ١ . أوجد قيمة م العددية

⑥ مستطيلان متشابهان بعدا الأول ٨ سم ، ١٢ سم ، ومحيط الثاني ٢٠٠ سم

طول المستطيل الثاني ومساحته .

⑦ علبة على شكل مستطيل طوله ٢٤ سم وعرضه ١٥ سم هل هذا المستطيل يقترب من

المستطيل الذهبي ؟ ولماذا ؟

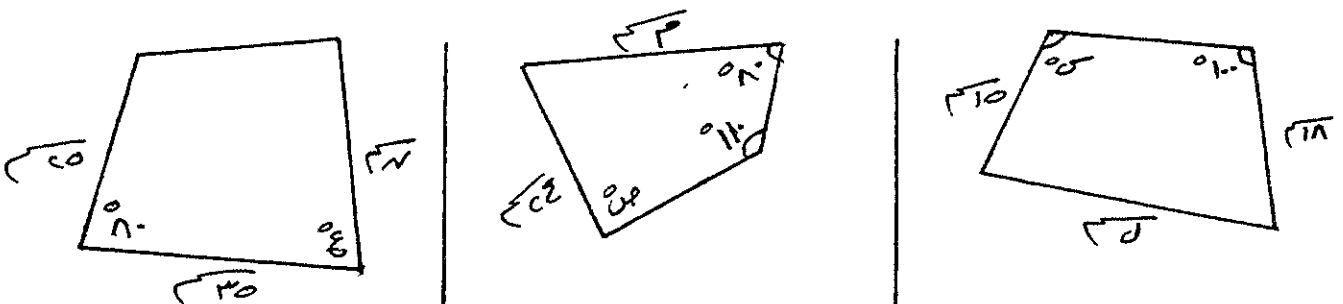
⑧ علبة على شكل مستطيل ذهبي طوله ٢٠,١٦ سم أحسب عرض العلبة لأقرب سم .

⑨ في الشكل المقابل :-

Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و

د هـ = ٨ سم ، هـ و = ٩ سم ، و د = ١٠ سم

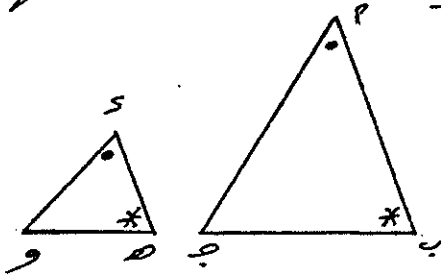
إذا كان محيط Δ أ ب جـ = ٨١ سم

أوجد أطوال أضلاع Δ أ ب جـ

⑩ المضلعات الثلاثة التالية متشابهة . أوجد قيمة الرموز المستخدمة في القياس .

(٢) تشابه المثلثات

تمهيد :- من الدرس السابق علمنا أنه لكي يتشابه مضلعان يجب أن يتحقق شرطا التشابه معًا ولا يكفي تحقق أحدهما دون الآخر.

← أما في المثلثات فقد علمنا في الصف الثاني الإعدادي أنه لكي يتشابه مثلثان يكفي تحقق شرط واحد فقط من الشرطين السابق ذكرهما.

مسلمة :- إذا طابقت زاويتان في مثلث نظائرهما في مثلث آخر كان المثلثان متشابهان

* في الشكل المقابل :- ق∠أ ≡ ق∠د ، ق∠ب ≡ ق∠هـ

فإن △ أ ب جـ ~ △ د هـ و وينتج من التشابه أن :-

الأضلاع المتناظرة متناسبة ⇐ $\frac{أب}{دهـ} = \frac{بجـ}{هـو} = \frac{أجـ}{دو}$

* حالات خاصة *

① المثلثان المتساويا الأضلاع متشابهان .

② يتشابه المثلثين القائما الزاوية إذا ساوى قياس إحدى الزاويتين الحادتين في أحدهما قياس إحدى الزاويتين الحادتين من الآخر.

③ يتشابه المثلثان المتساويا الساقين :-

* إذا ساوى قياس إحدى زاويتي القاعدة في أحدهما قياس إحدى زاويتي القاعدة من الآخر.

* إذا ساوى قياس زاوية الرأس في أحدهما قياس زاوية الرأس في الآخر.

تدريب بين أيا من أزواج المثلثات التالية تكون متشابهة ثم اكتب أسماء المثلثات المتشابهة

أ) △ أ ب جـ : ٨٠° ، ٥٥° ; △ د هـ و : ٤٥° ، ٥٥°

ب) △ س ص ع : ٥٥° ، زاوية قائمة ; △ ل م ن : ٥٥° ، زاوية قائمة

مثال ①:- في △ أ ب جـ ، د ∈ أب ، هـ ∈ أجـ حيث دهـ // ب جـ

(١) أثبت أن △ أ د هـ ~ △ أ ب جـ

(٢) أوجد طول كل من أد ، ب جـ

الحل :- ∵ دهـ // ب جـ

∴ ق(∠أدهـ) = ق(∠ب) ، ق(∠أهـد) = ق(∠جـ) "بالتناظر"

في △△ أ د هـ ، أ ب جـ فيهما

∠ أدهـ ≡ ∠ ب
∠ أهـد ≡ ∠ جـ
∠ أ مشترك

∴ △ أ د هـ ~ △ أ ب جـ وينتج من التشابه :-

أد / أب = دهـ / ب جـ = أهـ / أجـ ⟸ أد / (أد + ١٫٢) = ٤٫٢ / ب جـ = ٣ / ٤

⟸ ب جـ = (٤ × ٤٫٢) / ٣ = ٥٫٦ سم

⟸ ٤ أد = ٣ (أد + ١٫٢) ⟸ ٤ أد = ٣ أد + ٣٫٦ ⟸ أد = ٣٫٦ سم

* تدريب * من الشكل المقابل

اثبت أن △ أ ب جـ ~ △ أ د هـ

ثم أوجد قيمة س العددية

مثال ② في الشكل المقابل :..

اثبت أن △ أ ب جـ ~ △ أ د هـ

ثم أوجد قيمة س العددية .

الحل :- ∵ $\overline{بجـ} // \overline{دهـ}$

∴ ق(ب) = ق(د) ، ق(جـ) = ق(هـ) "بالتبادل"

في △△ أ ب جـ ، أ د هـ وفيهما

ق(∠ب) = ق(∠د)
ق(∠جـ) = ق(∠هـ)
ق(∠ب أ جـ) = ق(∠د أ هـ) "بالتقابل بالرأس"

∴ △ أ ب جـ ~ △ أ د هـ وينتج :-

$\frac{أب}{أد} = \frac{بجـ}{دهـ} = \frac{أجـ}{أهـ}$ ⟸ $\frac{٢ص + ٣}{س + ٤} = \frac{٥}{٣}$ ⟸ ٣(٢ص + ٣) = ٥(س + ٤)

∴ ٦س + ٩ = ٥س + ٢٠ ⟸ **س = ١١**

تدريب في الشكل المقابل :-

اثبت أن △ د س ص ~ △ د و هـ

ثم أوجد طول $\overline{سهـ}$

مثال ③ :- $\overline{أهـ}$ ، $\overline{بجـ}$ وتران متقاطعان في دائرة في نقطة د حيث د منتصف $\overline{بجـ}$

اثبت أن (ب د)^2 = أد × د هـ

البرهان :- **العمل** :- نرسم $\overline{بهـ}$ ، $\overline{أجـ}$

في △△ أ د جـ ، ب د هـ فيهما

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) محيطيتان مشتركتان في $\overset{\frown}{هجـ}$

∴ ق(∠أ د جـ) = ق(∠هـ د ب) بالتقابل بالرأس

∴ △ أ د جـ ~ △ ب د هـ وينتج أن $\frac{أد}{بد} = \frac{دجـ}{دهـ}$ ، ∵ ب د = د جـ معطى

$\because \frac{أد}{بد} = \frac{بد}{دهـ} \Leftarrow (بد)^2 = أد \times دهـ$ #

"نتائج هامة"

⊛ نتيجة (١) :- إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلي.

في الشكل المقابل :-

إذا كان $\overleftrightarrow{دهـ}$ // $\overline{بج}$ ويقطع $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أج}$ في د ، هـ على الترتيب

فإن △ أدهـ ~ △ أبج

مثال ③ :- في الشكل المقابل :-

أبج مثلث ، د ∈ $\overline{أب}$ ، رسم $\overleftrightarrow{دهـ}$ // $\overline{بج}$

ويقطع $\overline{أج}$ في هـ ، $\overleftrightarrow{دو}$ // $\overline{أج}$ ويقطع $\overline{بج}$ في و.

برهن أن △ أدهـ ~ △ دبو.

الحل :- ∵ $\overleftrightarrow{دهـ}$ // $\overline{بج}$ ∴ △ أدهـ ~ △ أبج ← ①

∵ $\overleftrightarrow{دو}$ // $\overline{أج}$ ∴ △ دبو ~ △ أبج ← ②

من ① ، ② ينتج أن △ أدهـ ~ △ دبو #

مثال ④ في الشكل المقابل :-

(١) اذكر ثلاثة أزواج من المثلثات المتشابهة

(٢) اثبت أن $\frac{دس}{بص} = \frac{سهـ}{صج} = \frac{دهـ}{بج}$

الحل :- Δ أ د هـ ~ Δ أ ب جـ ، Δ أ د س ~ Δ أ ب ص ، Δ أ س هـ ~ Δ أ ص جـ #

∵ Δ أ د هـ ~ Δ أ ب جـ ⟸ $\frac{أد}{أب} = \frac{دهـ}{بجـ} = \frac{أهـ}{أجـ}$ ← (١)

∵ Δ أ د س ~ Δ أ ب ص ⟸ $\frac{أد}{أب} = \frac{دس}{بص} = \frac{أس}{أص}$ ← (٢)

∵ Δ أ س هـ ~ Δ أ ص جـ ⟸ $\frac{أس}{أص} = \frac{سهـ}{صجـ} = \frac{أهـ}{أجـ}$ ← (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

∴ $\frac{دس}{بص} = \frac{سهـ}{صجـ} = \frac{دهـ}{بجـ}$ #

⊛ نتيجة (٢) :- إذا رسم من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكلاهما يشابه المثلث الأصلي.

من الشكل المقابل :-

• في $\Delta\Delta$ د ب أ ، أ ب جـ فيهما :-

ق(أ د̂ ب) = ق(جـ أ̂ ب) = 90° ، ب مشتركة

∴ Δ د ب أ ~ Δ أ ب جـ ← (I)

• في $\Delta\Delta$ د أ جـ ، أ ب جـ فيهما :-

ق(جـ د̂ أ) = ق(جـ أ̂ ب) = 90° ، جـ مشتركة

∴ Δ د أ جـ ~ Δ أ ب جـ ← (II)

من (I) ، (II) ∴ Δ د ب أ ~ Δ د أ جـ ~ Δ أ ب جـ ← (*)

ملحوظة هامة "

من الشكل السابق والعلاقة (*) يمكن استنتاج نظريات أقليدس :-

(١) من تشابه $\Delta\Delta$ د ب أ ، أ ب جـ ⟸ $\frac{دب}{أب} = \frac{أب}{بجـ}$

∴ $(أب)^2 = دب \times بجـ$ أي أن أب وسط متناسب بين دب ، بجـ

② من تشابه △△ د أ جـ ، أ ب جـ $\Leftarrow \frac{دجـ}{أجـ} = \frac{أجـ}{بجـ}$

∴ $(أجـ)^2 = دجـ \times بجـ$ أي أن: أجـ وسط متناسب بين دجـ ، ب جـ

③ من تشابه △△ د ب أ ، د أ جـ $\Leftarrow \frac{أد}{دجـ} = \frac{دب}{أد}$

∴ $(أد)^2 = دب \times دجـ$ أي أن: أد وسط متناسب بين دب ، دجـ

④ من تشابه △△ د ب أ ، أ ب جـ $\Leftarrow \frac{أب}{جـب} = \frac{أد}{أجـ}$

∴ $أد \times جـب = أب \times جـأ$ ومنها $\Leftarrow أد = \frac{أب \times أجـ}{ب جـ}$

مثال ⑤ :- في الشكل المقابل :- أ ب جـ مثلث قائم في ب

$\overline{بد} \perp \overline{أجـ}$ ، أد = ٥٫٤ سم ، دجـ = ٨ سم

أوجد قيمة س ، ص

الحل :- ∵ △ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

∵ $\overline{بد} \perp \overline{أجـ}$

∴ △ د ب أ ∼ △ د جـ أ ∼ △ ب جـ أ "وينتج نظريات أقليدس"

∴ $(بجـ)^2 = جـد \times جـأ \Leftarrow (٣س + ٤)^2 = ٨ \times ١٢٫٥ = ١٠٠$ (٦)

∴ ٣س + ٤ = ± ١٠

إما ٣س + ٤ = ١٠ ← ٣س = ٦ $\Leftarrow$ س = ٢

أو ٣س + ٤ = −١٠ ← ٣س = −١٤ $\Leftarrow$ س = $\frac{-١٤}{٣}$ مرفوضة

∴ $(بد)^2 = أد \times دجـ \Leftarrow (ص - ٣)^2 = ٤٫٥ \times ٨ = ٣٦$ (٦)

∴ ص − ٣ = ± ٦

إما ص − ٣ = ٦ ← ص = ٩

أو ص − ٣ = −٦ ← ص = −٣ مرفوضة #

* تدريب * من الشكل المقابل :-

△ أ ب جـ قائم الزاوية في أ ، أ د ⊥ ب جـ أكمل :-

① $\frac{ب د}{د أ} = \frac{أ د}{....}$ ② $\frac{ب د}{ب أ} = \frac{أ د}{....}$

③ $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{أ د}{.....}$ ④ $\frac{....}{جـ ب} = \frac{أ د}{أ جـ}$

⑤ $\frac{.....}{أ ب} = \frac{أ ب}{....}$ ⑥ $(جـ أ)^2 = ... \times .....$

⑦ $(أ جـ)^2 = ... \times ....$ ⑧ $أ د = \frac{.... \times أ جـ}{جـ ب}$

مثال ⑥ :- أ ب جـ ، د هـ و مثلثان متشابهان . رسم $\overleftrightarrow{أ س}$ ⊥ ب جـ ليقطعه في س

ورسم $\overleftrightarrow{د ص}$ ⊥ هـ و ليقطعه في ص . أثبت أن ب س × ص و = جـ س × ص هـ

الحل :- ∵ △ أ ب جـ ∼ △ د هـ و

∴ ق(∠ب) = ق(∠هـ) ، ق(∠جـ) = ق(∠و)

في △△ أ ب س ، د هـ ص

∵ ق(∠ب) = ق(∠هـ) ، ق(∠ب س أ) = ق(∠هـ ص د) = $90°$

∴ △ أ ب س ∼ △ د هـ ص وينتج أن $\frac{أ ب}{د هـ} = \frac{ب س}{هـ ص} = \frac{أ س}{د ص}$ ⟵ ①

في △△ أ س جـ ، د ص و

∵ ق(∠جـ) = ق(∠و) ، ق(∠جـ س أ) = ق(∠و ص د) = $90°$

∴ △ أ س جـ ∼ △ د ص و وينتج أن $\frac{أ س}{د ص} = \frac{س جـ}{ص و} = \frac{أ جـ}{د و}$ ⟵ ②

من ① ، ② ∴ $\frac{ب س}{هـ ص} = \frac{س جـ}{ص و}$ ⟸ ب س × ص و = س جـ × هـ ص #

مثال ⑦ :- أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ، رسم $\overleftrightarrow{أ د}$ ⊥ ب جـ ليقطعه في د

إذا كان $\frac{ب د}{د جـ} = \frac{1}{2}$ ، أ د = $6\sqrt{2}$ سم أوجد طول كل من ب د ، أ ب ، أ جـ

الحل: ∵ $\frac{ب د}{د ج} = \frac{1}{2}$ ⟸ ب د = م ، د ج = ٢م

∵ Δ أ ب ج قائم في أ ، ∵ أد ⊥ ب ج

∴ (أد)² = ب د × د ج ⟸ (٦√٢)² = م × ٢م

⟸ ٧٢ = ٢م² ⟸ م² = $\frac{٧٢}{٢}$ = ٣٦ ⟸ م = ٦ سم

∴ ب د = ٦ سم ، د ج = ٢ × ٦ = ١٢ سم

∵ (أج)² = ج د × ج ب ⟸ (أج)² = ١٢ × ١٨ = ٢١٦ ⟸ أج = √٢١٦ = ٦√٦ سم

مثال (٨): في الشكل المقابل: أ ب ج مثلث قائم في أ

أد ⊥ ب ج ، د هـ ⊥ أب ، د و ⊥ أج

اثبت أن (١) Δ أ د هـ ~ Δ ج د و

(٢) مساحة المستطيل أ هـ د و = √(أ هـ × هـ ب × أ و × و ج)

الحل: ∵ ∠ج تتمم ∠د أ ج ، ∠هـ أ د تتمم ∠د أ ج

∴ ق(∠ج) = ق(∠هـ أ د) ، ∵ ق(∠د هـ أ) = ق(∠د و ج) = ٩٠°

∴ Δ أ د هـ ~ Δ ج د و # (I)

∵ (د هـ)² = أ هـ × هـ ب ⟸ د هـ = √(أ هـ × هـ ب)

∵ (د و)² = أ و × و ج ⟸ د و = √(أ و × و ج)

∴ مساحة المستطيل أ هـ د و = الطول × العرض = د هـ × د و

∴ مساحة المستطيل = √(أ هـ × هـ ب) × √(أ و × و ج) = √(أ هـ × هـ ب × أ و × و ج) # (II)

تمادين على "تشابه المثلثات"

١ اذكر الحالات التي يكون فيها المثلثان متشابهان ومن حالة التشابه اذكر سبب التشابه

٢ أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس :-

٣ $\overline{أب}$ ، $\overline{دجـ}$ وتران في دائرة $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{دجـ} = \{هـ\}$ حيث هـ خارج الدائرة

أب = ٤ سم ، دجـ = ٧ سم ، ب هـ = ٦ سم أثبت أن Δ أدهـ ~ Δ جـ ب هـ

ثم أوجد طول جـ هـ

٤ في الشكل المقابل :- أ ب جـ ، س ص ع مثلثان فيهما

ق(جـ) = ق(ع) = ٦٠° ، ق(أ) = ٤٩°

، ق(ص) = ٧١° ، ص ع = ٨ سم ، س ع = ١٠ سم

، ب جـ = ٣,٦ سم . أثبت أن Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع ثم أوجد طول $\overline{أجـ}$

٥ في Δ أ ب جـ : أ جـ > أ ب ، م $\in$ $\overline{أجـ}$ حيث ق(∠أ ب م) = ق(جـ)

اثبت أن (أب)² = أ م × أ جـ

٦ في الشكل المقابل :- أ ب جـ د متوازي أضلاع و ∈ جـ د ، رسم ب و فيقطع أ جـ في هـ ويقطع أ د في ى

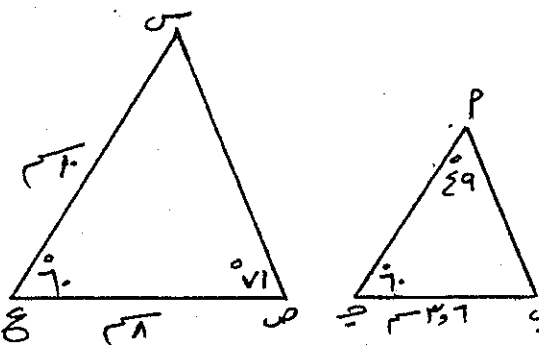
اثبت أن (١) △ أ هـ ى ~ △ جـ هـ ب

(٢) $(هـ ب)^2$ = هـ و × هـ ى

٧ في الشكل المقابل :-

أ ب جـ مثلث منفرج الزاوية في أ ، أ ب = أ جـ

رسم أ د ⊥ أ ب ويقطع ب جـ في د

اثبت أن ٢ $(أ ب)^2$ = ب د × ب جـ

٨ أراد تلميذ أن يعرف ارتفاع سارية العلم الذي في مدرسته فوضع مرآة على بعد ٥ أمتار من قاعدة السارية ثم تحرك إلى الخلف مسافة ١ متر وكانت عيناه على ارتفاع ١٫٥٠ متر فوق سطح الأرض فإذا كانت قدماه والمرآة والسارية على استقامة واحدة أوجد ارتفاع السارية

"علماً بأن زاوية السقوط = زاوية الانعكاس"

(٣) "تابع / تشابه المثلثات"

نظرية (١) :-

إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإنهما يتشابهان.

المعطيات :- Δ Δ ا ب جـ ، د هـ و فيهما

$\frac{اب}{دهـ} = \frac{بجـ}{هـو} = \frac{اجـ}{دو}$

المطلوب :- Δ ا ب جـ ∼ Δ د هـ و

العمل :- نعين س ∈ $\overline{اب}$ ، ا س = د هـ ، نرسم $\overline{سص}$ // $\overline{بجـ}$ ويقطع $\overline{اجـ}$ في ص

البرهان :- ∵ $\overline{سص}$ // $\overline{بجـ}$ ∴ Δ ا ب جـ ∼ Δ ا س ص

ويكون $\frac{اب}{اس} = \frac{بجـ}{سص} = \frac{اجـ}{اص}$ ∵ ا س = د هـ

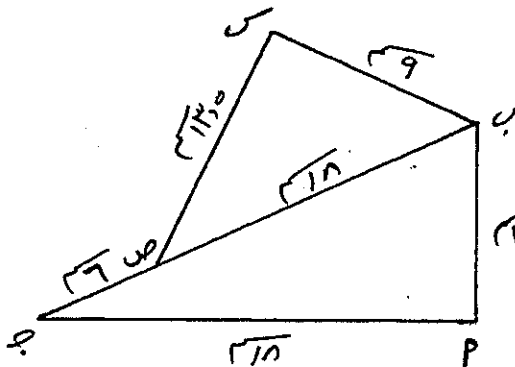
∴ $\frac{اب}{دهـ} = \frac{بجـ}{سص} = \frac{اجـ}{اص}$ ① ، ∵ $\frac{اب}{دهـ} = \frac{بجـ}{هـو} = \frac{اجـ}{دو}$ معطى ②

من ①، ② ⇐ س ص = هـ و ، ا ص = و د

∴ Δ ا س ص ≡ Δ د هـ و "الأضلاع الثلاثة متطابقة"

∴ Δ ا س ص ∼ Δ د هـ و "المثلثان المتطابقان يكونان متشابهان"

∵ Δ ا س ص ∼ Δ ا ب جـ "برهانا"

∴ Δ ا ب جـ ∼ Δ د هـ و #

مثال ① :- في الشكل المقابل :-

ب ، ص ، جـ على استقامة واحدة

أثبت أن : (١) Δ ا ب جـ ∼ Δ س ب ص

(٢) $\overrightarrow{بجـ}$ ينصف ∠ ا ب س

الحل :- في Δ Δ ا ب جـ ، س ب ص فيهما :-

$\frac{أب}{س ب} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ ، $\frac{ب جـ}{ب ص} = \frac{18+6}{18} = \frac{4}{3}$ ، $\frac{أ جـ}{س ص} = \frac{18}{13.5} = \frac{4}{3}$

∴ $\frac{أب}{س ب} = \frac{ب جـ}{ب ص} = \frac{أ جـ}{س ص}$ (الأضلاع المتناظرة متناسبة)

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ س ب ص # وينتج من التشابه أن الزوايا المتناظرة متساوية

ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ س ب ص) أي أن $\overrightarrow{ب جـ}$ ينصف ∠ أ ب س #

مثال ②:- في الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جـ د} = \{هـ\}$

حيث $\frac{أ هـ}{جـ هـ} = \frac{ب هـ}{د هـ}$ ، $\frac{أ جـ}{جـ هـ} = \frac{ب د}{د هـ}$

أثبت أن $\overleftrightarrow{أ جـ} \parallel \overleftrightarrow{ب د}$

الحل:- ∵ $\frac{أ هـ}{جـ هـ} = \frac{ب هـ}{د هـ}$ ⟸ $\frac{أ هـ}{ب هـ} = \frac{جـ هـ}{د هـ}$ ← ①

"من خواص التناسب"

∵ $\frac{أ جـ}{جـ هـ} = \frac{ب د}{د هـ}$ ⟸ $\frac{أ جـ}{ب د} = \frac{جـ هـ}{د هـ}$ ← ②

من ①، ② ينتج أن: $\frac{أ هـ}{ب هـ} = \frac{أ جـ}{ب د} = \frac{جـ هـ}{د هـ}$

أي أن:- Δ أ هـ جـ ~ Δ ب هـ د وينتج أن

ق(∠ أ جـ هـ) = ق(∠ ب د هـ) "وهما في وضع تناظر" ∴ $\overleftrightarrow{أ جـ} \parallel \overleftrightarrow{ب د}$ #

مثال ③:- في الشكل المقابل: أ ب جـ د شكل رباعي

هـ ∈ $\overline{ب د}$ حيث $\frac{أ ب}{أ د} = \frac{جـ هـ}{ب جـ}$ ، $\frac{ب د}{أ د} = \frac{هـ ب}{ب جـ}$

أثبت أن:- (1) $\overline{أ د} \parallel \overline{ب جـ}$ ، (2) $\overline{أ ب} \parallel \overline{جـ هـ}$

الحل:- ∵ $\frac{أ ب}{أ د} = \frac{جـ هـ}{ب جـ}$ ⟸ $\frac{أ ب}{جـ هـ} = \frac{أ د}{ب جـ}$ ← ①

∵ $\frac{ب د}{أ د} = \frac{هـ ب}{ب جـ}$ ⟸ $\frac{ب د}{هـ ب} = \frac{أ د}{ب جـ}$ ← ②

من ①، ② ⟸ $\frac{أ ب}{جـ هـ} = \frac{د أ}{ب جـ} = \frac{ب د}{هـ ب}$ ∴ Δ د ب أ ~ Δ ب هـ جـ

ويستنتج أن ق(∠أ ء ب) = ق(∠ء ب هـ) وهما في وضع تبادل ∴ أء // ب جـ #

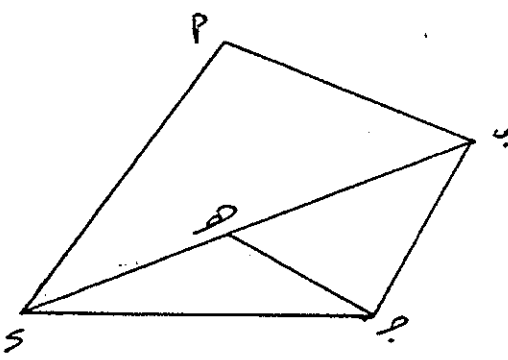
، ق(∠أ ب ء) = ق(∠هـ ء ب) وهما في وضع تبادل ∴ أب // جـ هـ #

*** تدريب *** [أ] من الشكل المقابل

اثبت أن Δ س ص ع ~ Δ ل س ع

[ب] من الشكل المقابل:

اثبت أن Δ جـ أ ب ~ Δ ء هـ ب ثم اثبت أن ب ء ينصف ∠ أ ب هـ

(الشكل: هـ ، ب ، أ ، جـ ، ء ، و ؛ ٦ سم ، ٩ سم ، ١٢ سم ، ٨ سم ، ٤ سم ، ١٢ سم)

نظرية (٢) :-

إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتوي هاتان الزاويتان كان المثلثان متشابهين.

المعطيات: ∠أ ≡ ∠ء ، $\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ءو}}$

المطلوب: Δ أ ب جـ ~ Δ ء هـ و

العمل: خذ س ∈ أب حيث أس = ءهـ

وارسم س ص // ب جـ ويقطع أجـ في ص

البرهان: ∵ س ص // ب جـ ∴ Δ أ ب جـ ~ Δ أ س ص ← (1)

ويكون $\frac{\text{أب}}{\text{أس}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أص}}$ ، ∵ $\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ءو}}$ (معطى) ، ∵ أس = ءهـ

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أس}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ءو}}$ ويكون أص = ءو

∴ Δ أ س ص ≡ Δ ء هـ و "ضلعان وزاوية محصورة"

∴ Δ أ س ص ~ Δ ء هـ و ← (2)

من (1) ، (2) ينتج أن Δ أ ب جـ ~ Δ ء هـ و #

مثال ④ :- في الشكل المقابل :- د هـ و مثلث فيه

د و = ١٢ سم ، د هـ = ١٠ سم ، هـ و = ٨ سم

س هـ = ٤ سم ، ص و = ٧ سم أوجد :-

(١) طول س ص ، (٢) أثبت أن الشكل س هـ و ص رباعي دائري .

الحل :- د ص = ١٢ - ٧ = ٥ سم ، د س = ١٠ - ٤ = ٦ سم

في ΔΔ د هـ و ، د ص س فيهما :- $\frac{د س}{د و} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{د ص}{د هـ} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{د س}{د و} = \frac{د ص}{د هـ}$ ، ∵ ∠د مشتركة ∴ Δ د هـ و ~ Δ د ص س

∴ $\frac{د س}{د و} = \frac{س ص}{هـ و}$ ⇐ $\frac{١}{٢} = \frac{س ص}{٨}$ ⇐ س ص = $\frac{٨}{٢}$ = ٤ سم

وينتج أيضاً من التشابه أن ق(∠د ص س) = ق(∠د هـ و)

∵ ∠د ص س زاوية خارجة عن الشكل الرباعي س هـ و ص ∴ الشكل س هـ و ص رباعي دائري

مثال ⑤ :- في الشكل المقابل :-

أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس مفسراً إجابتك

الحل :-

لإيجاد الرمز س يجب إثبات أن أ د // ب جـ وذلك من تشابه المثلثين أ د هـ ، ب جـ هـ

في ΔΔ أ د هـ ، ب جـ هـ فيهما :- ق(∠أ هـ د) = ق(∠ب هـ جـ)

∵ $\frac{أ هـ}{هـ ب} = \frac{٣}{٤٫٥} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{د هـ}{هـ جـ} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

∴ Δ أ د هـ ~ Δ ب جـ هـ وينتج من التشابه أن :-

ق(∠أ) = ق(∠ب) = ٧٥° ∴ س = ٧٥° #

* تدريب * في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس مفسراً إجابتك

مثال ⑥ :- أ ب جـ مثلث ، د ∈ ب جـ حيث (أ جـ)² = جـ د × جـ ب

اثبت أن △ أ جـ د ~ △ ب جـ أ

الحل :- في △△ أ ب جـ ، د أ جـ فيهما

∠ جـ مشتركة (١)

∵ (أ جـ)² = جـ د × جـ ب ⇐ أ جـ × أ جـ = جـ د × جـ ب ⇐ أ جـ / جـ ب = جـ د / أ جـ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن △ أ جـ د ~ △ ب جـ أ #.

مثال ⑦ :- أ ب جـ ، د هـ و مثلثان متشابهان ، س منتصف ب جـ ، ص منتصف هـ و

أثبت أن (١) △ أ ب س ~ △ د هـ ص (٢) أ س × د هـ = أ ب × د ص

الحل :- ∵ △ أ ب جـ ~ △ د هـ و

∴ ق(∠ب) = ق(∠هـ) ، أ ب / د هـ = ب جـ / هـ و = أ جـ / د و ← ①

∵ س منتصف ب جـ ، ص منتصف هـ و

∴ ب جـ / هـ و = ب س / هـ ص ← ②

في △△ أ ب س ، د هـ ص فيهما : ∠ب ≡ ∠هـ ، أ ب / د هـ = ب س / هـ ص (برهاناً من ١ ، ٢)

∴ △ أ ب س ~ △ د هـ ص وينتج من التشابه أن أ ب / د هـ = ب س / هـ ص = أ س / د ص ← ③

من ١ ، ٣ ⇐ أ ب / د هـ = أ س / د ص ⇐ أ س × د هـ = أ ب × د ص #

تمارين على " تابع / تشابه المثلثات "

١ اذكر أي الحالات يكون فيها المثلثان متشابهان ومن حالة التشابه اذكر سبب التشابه

(أ) (ب) (ج) (د)

٢ من الشكل المقابل :-

أثبت أن :-

(١) Δ أ ب جـ ~ Δ د ب و .

(٢) Δ هـ و جـ متساوي الساقين .

٣ من الشكل المقابل :-

أثبت أن :-

(١) Δ أ ب جـ ~ Δ س ب ص

(٢) ب جـ ينصف ∠ أ ب س

٤ من الشكل المقابل

(١) برهن أن

Δ ب د هـ ~ Δ ب أ جـ

واستنتج طول د هـ

(٢) الشكل أ جـ د هـ رباعي دائري

٥ من الشكل المقابل :-

Δ أ ب جـ ~ Δ .....

ومعامل التشابه .....

٦ أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة تتقاطع قطراه $\overline{أجـ}$ ، $\overline{بء}$ في هـ

فإذا كان $\frac{أب}{أهـ} = \frac{بء}{ءجـ}$ أثبت أن (١) △ أ ب هـ ~ △ ء ب جـ ، (٢) $\overrightarrow{بء}$ ينصف ∠ أ ب جـ

٧ في الشكل المقابل :- أ ب جـ ~ س ص ع

هـ منتصف ب جـ ، م منتصف ص ع ،

جـ ء ⊥ أ ب ، ع ل ⊥ س ص أثبت أن

(١) △ أ هـ جـ ~ △ س م ع ، (٢) $\frac{جـ ء}{ع ل} = \frac{أ هـ}{س م}$

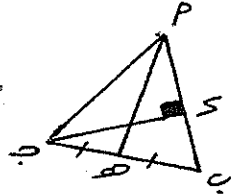
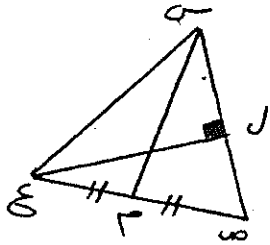
٨ أ ب جـ ، س ص ع مثلثان متشابهان حيث أ ب > أ جـ ، س ص > س ع

هـ ، ل منتصف ب جـ ، ص ع على الترتيب . رسم $\overline{أو}$ ⊥ ب جـ ، $\overline{س م}$ ⊥ ص ع

اثبت أن △ أ هـ و ~ △ س ل م .

٩ أ ب جـ مثلث ، ء ∈ $\overline{ب جـ}$ حيث $(أء)^2$ = ب ء × ء جـ ، ب أ × أ ء = ب ء × أ جـ

اثبت أن :- (١) △ أ ب ء ~ △ جـ أ ء

(٢) $\overline{أء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ (٣) ق(∠ ب أ جـ) = ٩٠°

(٣) "العلاقة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين"

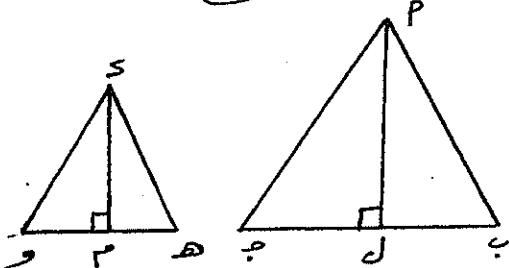
أولاً: النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين :-

نظرية (٣) :-

النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة

بين طولي أى ضلعين متناظرين فيهما.

فى الشكل المقابل :- إذا كان ∆ أ ب جـ ~ ∆ د هـ و

فإن $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{د هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}}\right)^2 = \left(\frac{\text{أ جـ}}{\text{د و}}\right)^2$

"ملاحظات هامة"

① النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين ارتفاعين متناظرين فيهما

فى الشكل السابق :- $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{د هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ل}}{\text{د م}}\right)^2$

② النسبة بين محيطي مضلعين (مثلثين) متشابهين تساوي النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما. فى الشكل السابق :- $\frac{\text{محيط } \triangle \text{أ ب جـ}}{\text{محيط } \triangle \text{د هـ و}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{د و}}$

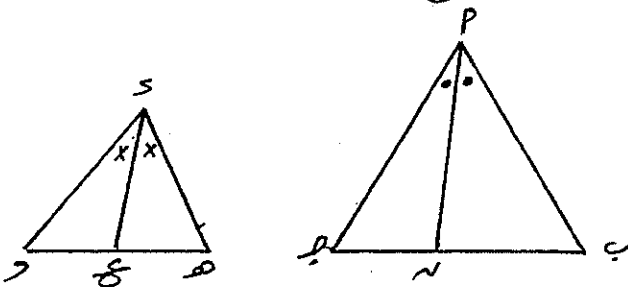
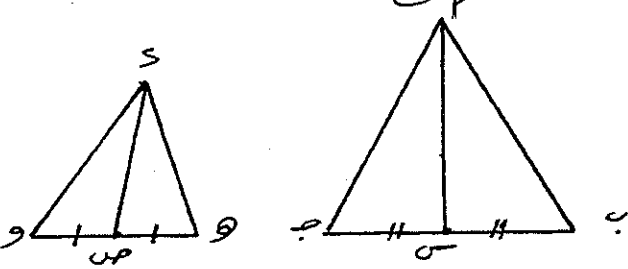
③ النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي أى متوسطين متناظرين فيهما.

فى الشكل المقابل :- ∆ أ ب جـ ~ ∆ د هـ و

∴ $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{د هـ و})} = \left(\frac{\text{أ س}}{\text{د ص}}\right)^2$

④ النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي أى منصفين لزاويتين متناظرتين فيهما

فى الشكل المقابل :- ∆ أ ب جـ ~ ∆ د هـ و

∴ $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{د هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ن}}{\text{د ع}}\right)^2$

⑤ النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين لهما نفس ⟸ الارتفاع تساوي النسبة بين طولي قاعدتيهما.
القاعدة تساوي النسبة بين ارتفاعيهما.

مثال ① :- في الشكل المقابل :- أ ب جـ مثلث ، د ∈ أ ب

حيث أد / د ب = ٣ / ٤ ، د هـ // ب جـ ويقطع أ جـ في هـ

إذا كانت مساحة △ أ ب جـ = ٧٨٤ سم² أوجد :-

(١) مساحة △ أ د هـ (٢) مساحة شبه المنحرف د ب جـ هـ

الحل :- ∵ د هـ // ب جـ ∴ △ أ د هـ ~ △ أ ب جـ

∴ م(△ أ د هـ) / م(△ أ ب جـ) = (أ د / أ ب)² ⟸ م(△ أ د هـ) / ٧٨٤ = (٣ / ٧)² = ٩ / ٤٩

⟸ م(△ أ د هـ) = ٩ × ٧٨٤ / ٤٩ = ١٤٤ سم² #

∵ م(شبه المنحرف د ب جـ هـ) = م(△ أ ب جـ) − م(△ أ د هـ)

∴ م(شبه المنحرف د ب جـ هـ) = ٧٨٤ − ١٤٤ = ٦٤٠ سم² #

تدريب أ ب جـ مثلث مساحته ٦٢,٥ سم² ، رسم س ص // ب جـ ويقطع أ ب في س ويقطع أ جـ في ص فإذا كان أ س : س ب = ٢ : ٣ أوجد مساحة الشكل س ب جـ ص

مثال ② :- إذا كانت النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين هي ٤ : ٩ فإذا كان محيط المثلث الأكبر ٩٠ سم أوجد محيط المثلث الأصغر

الحل :- نفرض أن △ أ ب جـ ~ △ د هـ و

∴ م(△ أ ب جـ) / م(△ د هـ و) = (أ ب / د هـ)² = ٤ / ٩ ⟸ أ ب / د هـ = ٢ / ٣ .

∵ محيط △ أ ب جـ / محيط △ د هـ و = أ ب / د هـ = ٢ / ٣ ⟸ محيط △ أ ب جـ / ٩٠ = ٢ / ٣

∴ محيط △ أ ب جـ = ٢ × ٩٠ / ٣ = ٦٠ سم #

* تدريب * إذا كانت النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين هي $\frac{9}{16}$ فإذا كان محيط المثلث الأصغر ٦٠ سم أوجد محيط المثلث الأكبر.

مثال ③ :- أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة بحيث $\frac{أب}{أجـ} = \frac{5}{3}$ ، رسم $\overleftrightarrow{أد}$ مماساً للدائرة عند أ قطع $\overrightarrow{بجـ}$ في د أوجد م(△ أ جـ د) : م(△ أ ب جـ)

الحل :- ∵ △△ أ د جـ ، ب د أ فيهما :

∠د مشتركة

ق(∠جـ أ د) = ق(∠ب) "مماسية ومحيطية مشتركتان في $\overset{\frown}{أجـ}$"

∴ △ أ د جـ ~ △ ب د أ ⇐ $\frac{م(△ أدجـ)}{م(△ بدأ)} = \left(\frac{أجـ}{أب}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

∴ $\frac{م(△ أدجـ)}{م(△ أدجـ) + م(△ أبجـ)} = \frac{9}{25}$

⇐ ٢٥ م(△ أ د جـ) = ٩ م(△ أ ب جـ) + ٩ م(△ أ د جـ)

∴ ١٦ م(△ أ د جـ) = ٩ م(△ أ ب جـ) ⇐ $\frac{م(△ أدجـ)}{م(△ أبجـ)} = \frac{9}{16}$ #

ثانياً : النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين :-

"**حقيقة**" :- المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات التي يشابه كل منها نظيره.

في الشكل المقابل :- إذا كان المضلع أ ب جـ د هـ ~ المضلع س ص ع ل م

فإن △ أ ب جـ ~ △ س ص ع ، △ أ جـ د ~ △ س ع ل ، △ أ د هـ ~ △ س ل م

"**ملحوظة**" : عدد المثلثات التي يمكن أن ينقسم إليها مضلع = (ن - ٢) مثلثاً حيث ن عدد الأضلاع

مثلاً :- المضلع الذي عدد أضلاعه ٨ أضلاع ينقسم إلى ٦ مثلثات.

نظرية (٤) :- النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي ضلعين متناظرين منهما.

من الشكل المقابل :-

$$\frac{\text{م (المضلع أ ب جـ د هـ)}}{\text{م (المضلع س ص ع ل م)}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}}\right)^2 = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\text{جـ د}}{\text{ع ل}}\right)^2 = \left(\frac{\text{د هـ}}{\text{ل م}}\right)^2 = \left(\frac{\text{هـ أ}}{\text{م س}}\right)^2$$

مثال ④ :- مضلعان متشابهان النسبة بين طولي ضلعين متناظرين منهما ١ : ٣ فإذا كان مجموع مساحتيهما ٥٠ سم² أوجد مساحة كل منهما.

الحل :-

∵ النسبة بين طولي ضلعين متناظرين = ١ : ٣ ∴ النسبة بين مساحة المضلعين = ١ : ٩

نفرض أن مساحة الأول = ١س سم² ومساحة الثاني = ٩س سم²

∵ مجموع مساحتيهما ٥٠ سم² ⇐ ١س + ٩س = ٥٠ ⇐ ١٠س = ٥٠ ⇐ **س = ٥**

∴ مساحة المضلع الأول = ١ × ٥ = ٥ سم² ، مساحة المضلع الثاني = ٩ × ٥ = ٤٥ سم² #

*** تدريب *** مضلعان متشابهان النسبة بين طولي ضلعين متناظرين منهما ٢ : ٣ فإذا كان الفرق بين مساحتيهما ٢٠ سم² أوجد مساحة كل منهما.

مثال ⑤ أ ب جـ د ، س ص ع ل مضلعان متشابهان فيهما ق(∠أ) = ٤٠° ، س ص = $\frac{٣}{٤}$ أ ب
جـ د = ١٦ سم . أحسب (١) ق(∠س) ، (٢) طول ع ل

(٣) م (المضلع أ ب جـ د) : م (المضلع س ص ع ل)

الحل :- ∵ المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل ∴ ق(∠أ) = ق(∠س) = ٤٠° #

∵ س ص = $\frac{3}{4}$ أ ب ⇐ $\frac{أب}{س ص} = \frac{4}{3}$ "من خواص التناسب"

من تشابه المضلعين نجد أن :- $\frac{أب}{س ص} = \frac{جـ ء}{ع ل}$ ⇐ $\frac{4}{3} = \frac{16}{ع ل}$

∴ ع ل = $\frac{16 \times 3}{4}$ = ١٢ سم #

∴ م (المضلع أ ب جـ ء) : م (المضلع س ص ع ل) = (أ ب)² : (س ص)² = 16 : 9 #

مثال ⑥ :- أ ب جـ ء ، س ص ع ل مضلعان متشابهان تقاطع قطرى الأول فى م وتقاطع قطرى الثانى فى ن اثبت أن: م (المضلع أ ب جـ ء) : م (المضلع س ص ع ل) = (م جـ)² : (ن ع)²

الحل :- ∵ المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع

، Δ ء ب جـ ~ Δ ل ص ع (لماذا؟)

∴ Δ م ب جـ ~ Δ ن ص ع وينتج أن: $\frac{ب جـ}{ص ع} = \frac{م جـ}{ن ع}$ ← (1)

∵ المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ $\frac{م (المضلع أ ب جـ ء)}{م (المضلع س ص ع ل)} = \left(\frac{ب جـ}{ص ع}\right)^2$ ← (2)

من (1) ، (2) ⇐ م (المضلع أ ب جـ ء) : م (المضلع س ص ع ل) = (م جـ)² : (ن ع)²

مثال ⑦ :- أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب وإذا كانت أ ب ، ب جـ ، أ جـ أضلاع متناظرة لثلاث مضلعات متشابهة منشأة على أضلاع المثلث أ ب جـ وهى على الترتيب : المضلع س ، المضلع ص ، المضلع ع .

اثبت أن م (المضلع س) + م (المضلع ص) = مساحة (المضلع ع)

الحل :- ∵ المضلع س ~ المضلع ع ⇐ $\frac{م (المضلع س)}{م (المضلع ع)} = \frac{(أ ب)^2}{(أ جـ)^2}$ ← (1)

∵ المضلع ص ~ المضلع ع ⇐ $\frac{م (المضلع ص)}{م (المضلع ع)} = \frac{(ب جـ)^2}{(أ جـ)^2}$ ← (2)

بجمع (١) ، (٢)

$\Leftarrow$ $\frac{\text{م (المضلع س)}}{\text{م (المضلع ع)}} + \frac{\text{م (المضلع ص)}}{\text{م (المضلع ع)}} = \frac{(\text{أب})^2}{(\text{أجـ})^2} + \frac{(\text{ب جـ})^2}{(\text{أجـ})^2}$

$\therefore$ $\frac{\text{م (المضلع س)} + \text{م (المضلع ص)}}{\text{م (المضلع ع)}} = \frac{(\text{أب})^2 + (\text{ب جـ})^2}{(\text{أجـ})^2} \leftarrow (١)$

$\because$ Δ أ ب جـ قائم في ب $\Leftarrow$ $(\text{أب})^2 + (\text{ب جـ})^2 = (\text{أجـ})^2 \leftarrow (٢)$

من (١) ، (٢) $\Leftarrow$ $\frac{\text{م (المضلع س)} + \text{م (المضلع ص)}}{\text{م (المضلع ع)}} = \frac{(\text{أجـ})^2}{(\text{أجـ})^2} = ١$

$\therefore$ م (المضلع س) + م (المضلع ص) = م (المضلع ع) #

مثال (٨) :- في الشكل المقابل :- أ ب جـ د متوازي أضلاع

هـ $\in$ $\overline{\text{أب}}$ حيث $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{٣}{٢}$ ، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}} \cap \overrightarrow{\text{جـ ب}} = \{\text{و}\}$

(١) أثبت أن Δ د جـ و $\sim$ Δ هـ أ د .

(٢) أوجد $\frac{\text{م}(\Delta \text{ د جـ و})}{\text{م}(\Delta \text{ هـ أ د})}$.

الحل :-

$\because$ $\Delta\Delta$ د جـ و ، هـ أ د فيهما

ق (د جـ) = ق (د أ) "من خواص المتوازي"

ق (د و جـ) = ق (أ د و) "بالتبادل"

$\therefore$ Δ د جـ و $\sim$ Δ هـ أ د #

$\therefore$ $\frac{\text{م}(\Delta \text{ د جـ و})}{\text{م}(\Delta \text{ هـ أ د})} = \left(\frac{\text{د جـ}}{\text{أ هـ}}\right)^2 = \left(\frac{٥}{٣}\right)^2 = \frac{٢٥}{٩}$ #

تمارين على العلاقة بين مساحتي مضلعين متشابهين :-

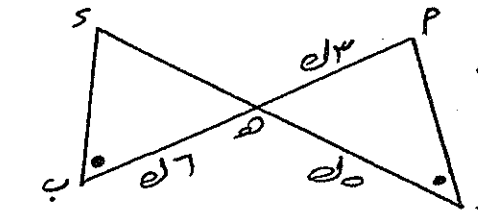
1 أكمل ما يأتي :-

(1) إذا كانت النسبة بين طولي ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين ٧ : ١١ فإن النسبة بين مساحتيهما .... ، وبين محيطيهما ....

(2) إذا كان Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع وكان أ ب = ٣ س ص فإن $\frac{\text{م}(\Delta \text{ س ص ع})}{\text{م}(\Delta \text{ أ ب جـ})}$ = ...

(3) مضلعان متشابهان النسبة بين مساحتيهما ٤ : ٩ فإن النسبة بين محيطيهما .....

(4) إذا كان Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و ، م(Δ أ ب جـ) = ٩ م(Δ د هـ و) وكان د هـ = ٤ سم فإن أ ب = ... سم .

(5) مربعان النسبة بين طولي قطريهما ٢ : ٥ فإذا كانت مساحة أصغرهما ٤ سم² فإن مساحة الأكبر ..... سم²

2 إذا كان طولا ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين هما ١٢ سم ، ١٦ سم وكانت مساحة المضلع الأصغر = ١٣٥ سم² أوجد مساحة المضلع الأكبر .

3 أ ب جـ مثلث ، د ∋ أ ب حيث أ د = ٢ ب د ، هـ ∋ أ جـ حيث د هـ // ب جـ إذا كانت م(Δ أ د هـ) = ٦٠ سم² أوجد مساحة شبه المنحرف د ب جـ هـ .

4 ادرس كلاً من الأشكال الآتية ، حيث له ثابت تناسب ، ثم أكمل :-

(أ) م(Δ أ جـ هـ) = ٩٠٠ سم²

فإن م(Δ د هـ ب) = ... سم²

(ب) ق(∠ ب أ جـ) = ٩٠°

أ د ⊥ ب جـ

م(Δ أ د جـ) = ١٨٠ سم²

فإن م(Δ أ ب جـ) = ... سم²

5 أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، رسمت المثلثات المتساوية الأضلاع أ ب س ، ب جـ ص ، أ جـ ع . أثبت أن م(Δ أ ب س) + م(Δ ب جـ ص) = م(Δ أ جـ ع)

6 $أ ب ج$ مثلث فيه $\frac{أب}{بج} = \frac{٤}{٣}$ ، رسمت الدائرة المارة برؤوسه. من نقطة ب رسم المماس لهذه الدائرة فقطع $\overleftrightarrow{أج}$ في هـ . اثبت أن $\frac{م(\triangle أ ب ج)}{م(\triangle أ ب هـ)} = \frac{٧}{١٦}$.

7 $أ ب ج د$ متوازي أضلاع ، $س \in \overrightarrow{أب}$ ، $س \notin \overline{أب}$ حيث $ب س = ٢ أ ب$ ، $ص \in \overrightarrow{جب}$ ، $ص \notin \overline{جب}$ حيث $ب ص = ٢ ب ج$ ، رسم متوازي الأضلاع ب س ع ص

اثبت أن $\frac{م(المتوازي\ أ ب ج د)}{م(المتوازي\ س ب ص ع)} = \frac{١}{٤}$.

8 $أ ب ج د$ ، $س ص ع ل$ مضلعان متشابهان فإذا كانت م منتصف $\overline{بج}$ ، ن منتصف $\overline{صع}$. اثبت أن م(المضلع أ ب ج د) : م(المضلع س ص ع ل) $= (م د)^٢ : (ن ل)^٢$

9 $أ ب ج$ مثلث قائم الزاوية في ب ، $\overline{ب د} \perp \overline{أج}$ ليقطعه في د ، رسم على $\overline{أب}$ ، $\overline{بج}$ المربعان أ س ص ب ، ب م ن ج خارج المثلث أ ب ج

(١) اثبت أن: المضلع د أ س ص ب ~ المضلع د ب م ن ج

(٢) إذا كان $أ ب = ٦$ سم ، $أ ج = ١٠$ سم . أوجد النسبة بين مساحتي سطحي المضلعين

10 $أ ب ج$ مثلث فيه $\overline{أب}$ ، $\overline{بج}$ ، $\overline{أج}$ أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعات متشابهة مرسومة خارج المثلث ، وهي المضلعات س ، ص ، ع على الترتيب فإذا كانت مساحة المضلع س = ٦٠ سم^٢ ومساحة المضلع ص = ٨٥ سم^٢ ومساحة المضلع ع = ١٢٥ سم^٢ . اثبت أن المثلث أ ب ج قائم الزاوية .

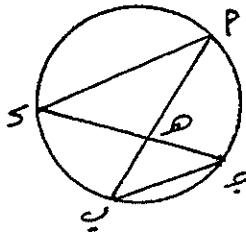
11 $أ ب ج د$ مربع قسمت $\overline{أب}$ ، $\overline{بج}$ ، $\overline{جد}$ ، $\overline{دأ}$ بالنقاط س ، ص ، ع ، ل بنسبة ١ : ٣ اثبت أن :-

(١) الشكل س ص ع ل مربع .

(٢) $\frac{م(المربع\ س ص ع ل)}{م(المربع\ أ ب ج د)} = \frac{٥}{٨}$.

(٥) "تطبيقات التشابه في الدائرة"

تمرين مشهور :-

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين أب ، جـ د للدائرة في نقطة هـ

فإن هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د

المعطيات :- أب ، جـ د وتران متقاطعان في هـ

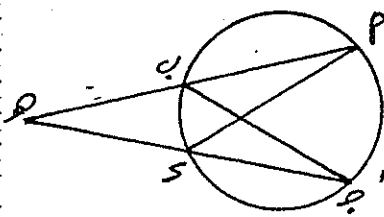
المطلوب :- اثبات أن هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د

العمل :- نرسم أ د ، ب جـ

البرهان :- في Δ أ هـ د ، Δ جـ هـ ب فيهما

ق(∠ د أ هـ) = ق(∠ هـ جـ ب) "محيطيتان مشتركتان في ب د"

ق(∠ أ هـ د) = ق(∠ جـ هـ ب) متقابلتين بالرأس

∴ Δ أ هـ د ~ Δ جـ هـ ب وينتج أن $\frac{أهـ}{جـهـ} = \frac{هـد}{هـب} = \frac{أد}{جـب}$

∴ من النسبتين الأولى والثانية ينتج هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د #

مثال ① :- في الشكل المقابل :-

أهـ = ٦ سم ، ب هـ = ٤ سم ، هـ جـ = ٣ سم أوجد طول هـ د

الحل :- ∵ أب ∩ جـ د = {هـ}

∴ أ هـ × هـ ب = جـ هـ × هـ د ⇐ ٦ × ٤ = ٣ × هـ د ⇐ ٢٤ = ٣ هـ د ⇐ (÷٣) هـ د = ٨ سم #

مثال ② :- في الشكل المقابل :- أب ∩ جـ د = {هـ}

اذا كان $\frac{أهـ}{هـب} = \frac{٤}{٣}$ ، هـ جـ = ٩ سم ، هـ د = ٤ سم

أوجد طول هـ ب .

الحل :- ∵ هـأ / هـب = ٤ / ٣ ∴ هـأ = ٤ل ، هـب = ٣ل حيث ل ≠ ٠

∵ أب ∩ جـد = {هـ} ∴ هـأ × هـب = هـجـ × هـد

∴ ٤ل × ٣ل = ٩ × ٤ ⇐ ١٢ل² = ٣٦ ⇐ (÷١٢) ل² = ٣ ⇐ (√) ل = √٣

∴ هـأ = ٤ل = ٤√٣ ، هـب = ٣ل = ٣√٣ #

---

* تدريب * (١) في الشكل المقابل :- أب ∩ جـد = {هـ} ، أهـ = ٩سم ، جـهـ = ٦سم ، هـد = ٣سم أوجد طول هـب

(٢) أوجد قيمة س في كل من الأشكال الآتية :-

مثال ③ في الشكل المقابل :- إذا كان

أب = ٤سم ، ب جـ = ٥سم ، أد = ١٢سم أوجد طول أهـ

الحل :- ∵ أ نقطة خارج الدائرة ، بجـ ∩ هـد = {أ}

∴ أب × أجـ = أهـ × أد ⇐ ٤ × ٩ = أهـ × ١٢

٣٦ = ١٢ أهـ ⇐ أهـ = ٣٦ / ١٢ = ٣سم

مثال ④ :- في الشكل المقابل :- أب ∩ جـد = {هـ}

أوجد طول بهـ

الحل :- ∵ أب ∩ جـد = {هـ} ⇐ بفرض أن بهـ = س

∴ هـد × هـجـ = هـب × هـأ ⇐ ٣ × ١٢ = س(س + ٥)

٣٦ = س² + ٥س ⇐ س² + ٥س − ٣٦ = ٠ ⇐ (س + ٩)(س − ٤) = ٠

∴ س = -٩ (مرفوضة) ، س = ٤ ∴ طول ب هـ = ٤ سم

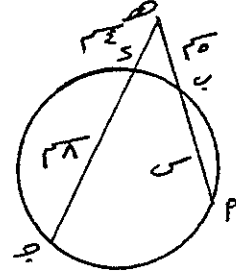
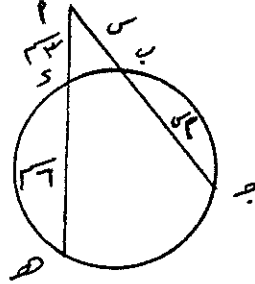
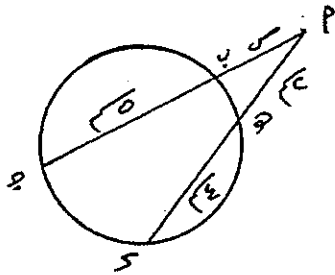
---

* تدريب * (١) من الشكل المقابل :-

أوجد طول د هـ

(٢) أوجد قيمة س من كل من الأشكال الآتية :-

نتيجة (١) :-

إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس فإن حاصل ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارج يساوي مربع طول المماس .

من الشكل المقابل :- أهـ مماس للدائرة ،

هـجـ يقطع الدائرة في د ، جـ

$\Leftarrow$ (هـ أ)^2 = هـ د × هـ جـ

مثال ⑤ :- من الشكل المقابل :- هـأ مماس للدائرة عند جـ

هـ د = ٤سم ، جـ د = ٥سم أوجد طول هـأ

الحل ∵ هـأ مماس للدائرة

∴ (هـ أ)^2 = هـ د × هـ جـ ⟸ (هـ أ)^2 = ٤ × ٩ = ٣٦ ⟸ هـ أ = ٦سم

---

* تدريب * في كل من الاشكال الآتية أوجد قيم س ، ص ، ع العددية * *

عكس نظرية مشهورة :-

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للقطعتين أب ، جـ ء في نقطة هـ (مختلفة عن كل من أ ، ب ، جـ ، ء) وكان هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ء فإن النقط أ ، ب ، جـ ، ء تقع على دائرة واحدة

في الشكل المقابل :-

اذا كان هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ء

فإن الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

مثال ⑥ :- في الشكل المقابل :-

اثبت أن الشكل هـ جـ ب ء رباعي دائري

الحل :- ∵ أ ء × أ ب = ٣ × ٨ = ٢٤

∵ أ هـ × أ جـ = ٦ × ٤ = ٢٤

∴ أ ء × أ ب = أ هـ × أ جـ ∵ $\overleftrightarrow{ب ء} \cap \overleftrightarrow{جـ هـ}$ = {أ}

∴ النقط هـ ، ب ، جـ ، ء تقع على دائرة واحدة ويكون الشكل هـ جـ ب ء رباعي دائري

هـ "ملحوظة" :- يمكن حل المثال السابق بإثبات تشابه المثلثين أ هـ ء ، أ ب جـ

مثال ⑦ :- من الشكل المقابل :-

اثبت أن الشكل ا ب ء جـ رباعي دائري .

الحل :- ∵ ا هـ × هـ ب = ٩ × ٤ = ٣٦ سم، ∵ جـ هـ × هـ ء = ١٢ × ٣ = ٣٦

∴ ا هـ × هـ ب = جـ هـ × هـ ء   ∵ ا ب ∩ جـ ء = {هـ}

∴ الشكل ا ب ء جـ رباعي دائري #

---

* تدريب * (١) في الشكل المقابل :-

اثبت أن الشكل ء ب جـ هـ رباعي دائري

(٢) في أي من الأشكال الآتية تقع النقط

ا ، ب ، جـ ، ء على دائرة واحدة ؟ فسر إجابتك

" نتيجة (٢) "

إذا كان (هـ ا)^2 = هـ ب × هـ جـ

فإن هـ ا مماس للدائرة المارة بالنقط ا ، ب ، جـ

مثال ⑧ :- ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ٨ سم ، ا جـ = ٤ سم ، ء ∈ ا جـ ، ء ∉ ا جـ

حيث جـ ء = ١٢ سم . اثبت أن ا ب تمس الدائرة المارة بالنقط ب ، جـ ، ء

الحل :- ∵ (ا ب)^2 = ٨^2 = ٦٤ سم ∵ ا جـ × ا ء = ٤ × ١٦ = ٦٤

∴ (ا ب)^2 = ا جـ × ا ء

∴ ا ب تمس الدائرة المارة بالنقط ب ، جـ ، ء

تمارين على " تطبيقات التشابه في الدائرة "

١ أوجد قيمة س العددية في كل من الأشكال الآتية :-

٢ في أي من الأشكال الآتية تقع النقط أ ، ب ، ج ، د على دائرة واحدة ، فسر إجابتك

٣ في أي من الأشكال التالية أب قطعة مماسية للدائرة المارة بالنقط ب ، ج ، د

④ في الشكل المقابل :- اثبت أن

(١) Δ س ل م ~ Δ س ع ص

(٢) الشكل ل ص ع م رباعي دائري

⑤ أب ∩ جـ د = {هـ} ، أهـ = $\frac{٣}{٤}$ ب هـ ، د هـ = $\frac{٣}{٢}$ هـ جـ ، إذا كان ب هـ = ٦سم ، جـ هـ = ٥سم أثبت أن النقط أ، ب، جـ، د تقع على دائرة واحدة

⑥ دائرتان متقاطعتان في أ، ب . جـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، جـ ∉ $\overline{أب}$ رسم من جـ القطعتان جـ س ، جـ ص مماستان للدائرة عند س، ص . أثبت أن : جـ س = جـ ص

⑦ في الشكل المقابل :-

اثبت أن : ب منتصف أ جـ

⑧ أ ب جـ مثلث ، د ∈ $\overline{ب جـ}$ حيث د ب = ٥سم ، د جـ = ٤سم ، اذا كان أ جـ = ٦سم

اثبت أن : (١) $\overline{أجـ}$ مماسة للدائرة التي تمر بالنقط أ، ب، د

(٢) Δ جـ د أ ~ Δ جـ أ ب   (٣) م(Δ أ ب د) : م(Δ أ ب جـ) = ٥ : ٩

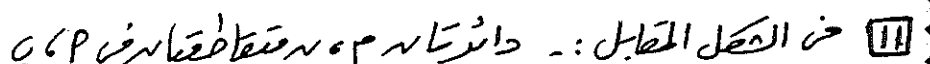
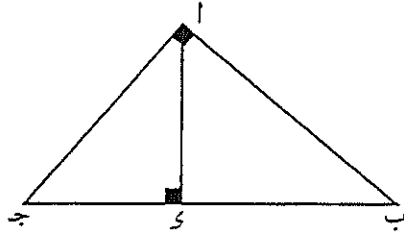
⑨ دائرتان متحدتا المركز م ، طولا نصفي قطريهما ١٢سم، ٧سم ، رسم الوتر أ د في الدائرة الكبرى ليقطع الدائرة الصغرى في ب، جـ على الترتيب أثبت أن : أب × ب د = ٩٥

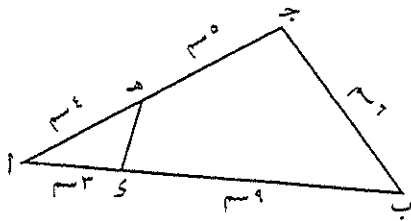
⑩ أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم ، رسم $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ فقطع $\overline{أ جـ}$ في هـ ، $\overline{أ د}$ في و اثبت أن :- (أ ب)^٢ = أ و × أ د ثم أوجد طول أ و

---

⑪ في الشكل المقابل :- دائرتان م، ن متقاطعتان في أ، ب

جـ س مماس للدائرة م ، جـ ص مماس للدائرة ن

اثبت أن جـ س = جـ ص

تمارين عامة

① في الشكل المقابل: أى العبارات التالية غير صحيحة:

(أ) $(أء)^2 = ءب \times ءجـ$

(ب) $(أب)^2 = بء \times بجـ$

(جـ) $أجـ \times بجـ = أب \times أء$

(د) $أب \times أجـ = أء \times بجـ$

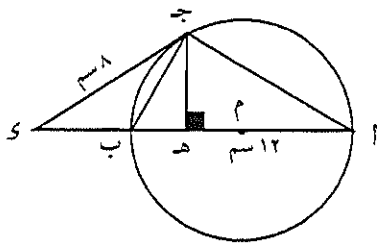
....

② في الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث ء ∈ $\overline{أب}$ ، هـ ∈ $\overline{أجـ}$.
أثبت أن △أ ء هـ ~ △أ جـ ب
ثم أوجد طول $\overline{هـء}$

....

....

....

....

③ في الشكل المقابل: $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م، طوله ١٢سم
ء ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ ء = ١٦سم، جـ تقع على الدائرة
حيث جـ ء = ٨سم. $\overline{جـهـ} \perp \overline{أب}$. أثبت أن:

(أ) $\overline{جـء}$ مماسة للدائرة م.

(ب) △ء جـ ب ~ △ء أ جـ

(جـ) جـ هـ = ٤,٨سم

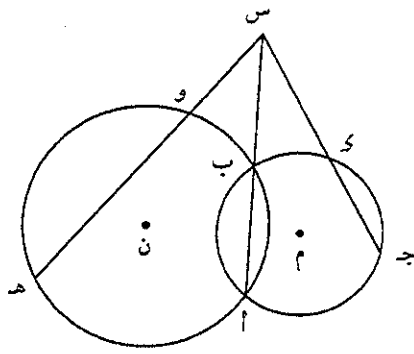
....

....

....

....

④ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب. $\overline{بء} \perp \overline{أجـ}$، أ ب = ١٥سم، أ ء = ٩سم. رسم على $\overline{أب}$، $\overline{بجـ}$ من الخارج المربعان أ ب ص س، ب جـ هـ و.

(أ) أثبت أن المضلع ء أ س ص ب ~ المضلع ء ب و هـ جـ.

(ب) أوجد مـ (المضلع ء أ س ص ب) : مـ (المضلع ء ب و هـ جـ)

....

⑤ فى الشكل المقابل: الدائرتان م، ن متقاطعتان فى أ، ب

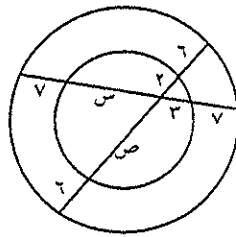
$\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جـى} \cap \overleftrightarrow{هـو}$ = {س} حيث

س ى = ٢ ى جـ، هـ و = ١٠سم، و س = ٦ سم

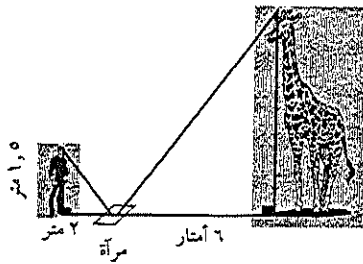
أ أثبت أن الشكل جـ ى و هـ رباعى دائرى.

ب أوجد طول $\overline{جـى}$

....

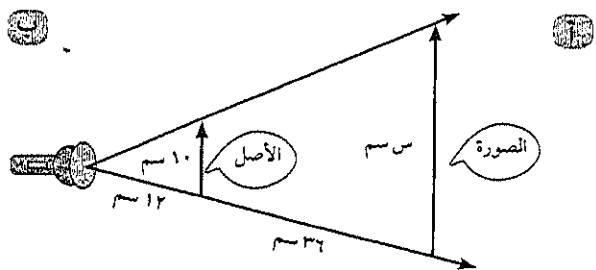
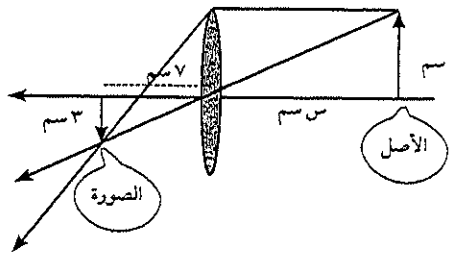
....

⑥ فى الشكل المقابل: دائرتان متحدتا المركز،
والأطوال المبينة للقطع المستقيمة بالسنتيمترات.
أوجد قيم س، ص العددية.

....

....

⑦ حديقة حيوان: فى رحلة مدرسية إلى حديقة الحيوان أراد حسام أن يعرف ارتفاع حيوان الزرافة. وضع حسام مرآة مستوية على الأرض تبعد عنه متران وعن الزرافة ٦ أمتار، فإذا كان حسام والمرآة والزرافة على استقامة واحدة وارتفاع حسام ١,٥ مترًا. كم يبلغ ارتفاع الزرافة.

....

....

⑧ الربط بالفيزياء: احسب معامل مغير البعد، واحسب قيمة س العددية فى كل شكل مما يلى.

....

....

اختبار الوحدة

① أكمل ما يأتي:

(أ) المضلعان المشابهان لثالث ....

(ب) إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما ....

(ج) إذا كانت النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين ٣ : ٥ فإن النسبة بين مساحتيهما ....

(د) إذا تقاطع وتران $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ ى}}$ لدائرة فى نقطة س فإن:

.... × .... = ... × ....

(هـ) إذا كان المستطيل أ ب جـ ى ~ المستطيل س ب ع ص،

أ ى = ١٥سم ، جـ ى = ٢٠سم، ص ع = ١٦سم

فإن: س ع = ...

② فى الشكل المقابل: $\overline{\text{أهـ}}$ // $\overline{\text{ى جـ}}$، $\overline{\text{أجـ}}$ = $\overline{\text{هـ ى}}$ ∩ {ب}،

أ ب = ٣سم، ب جـ = ٦سم، هـ ى = ١٢سم

فأوجد طول $\overline{\text{هـ ب}}$

....

....

③ فى الشكل المقابل: المضلع أ ب جـ ى ~ المضلع س هـ جـ و

أثبت أن $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{س هـ}}$

وإذا كانت س هـ = $\frac{1}{2}$ أب، جـ و = ٩سم فأوجد طول $\overline{\text{و ى}}$

....

....

④ أ ب جـ مثلث فيه س ∈ $\overline{\text{أب}}$ بحيث كان أ س = ٨سم، س ب = ١٢سم

ص ∈ $\overline{\text{أجـ}}$، بحيث كان أ ص = ١٠سم، ص جـ = ٦سم.

أثبت أن:

(أ) △ أ ب جـ ~ △ أ ص س

(ب) الشكل س ب جـ ص رباعى دائرى.

....

....

⑤ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ ى}}$ وتران فى دائرة متقاطعان، فى هـ فإذا كان هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، جـ هـ = ٤سم، هـ ى = ٩سم

فأوجد طول $\overline{\text{أب}}$. ....

اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

① إذا كان $\frac{٢س+١}{س+١}=\frac{٣}{٢}$ فإن ١١ - س تساوى:

(أ) -١٠ (ب) صفرًا (جـ) ٥ (د) ١٠

② مستعينًا بمعطيات الشكل، فإن س تساوى:

(أ) ٣٢ (ب) ١٨

(جـ) ٢٧ (د) ٥١

③ مستعينًا بمعطيات الشكل، فإن س تساوى:

(أ) ٥ (ب) ١١

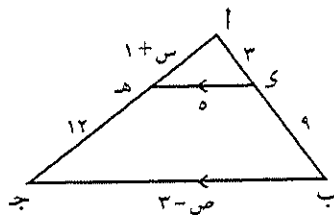
(جـ) ١٢ (د) ١٤

④ فى الشكل المقابل: أ ب = ١٢سم، جـ هـ = ٤ سم، فإن هـ ء تساوى:

(أ) ٥ سم (ب) ٦ سم

(جـ) ٨ سم (د) ٩ سم

⑤ مستطيلان متشابهان بعدا الأول ١٠ سم، ٨ سم، ومحيط الثانى ١٠٨ سم فإن طول المستطيل الثانى يساوى:

(أ) ١٨ سم (ب) ٢٤ سم (جـ) ٣٠ سم (د) ٣٦ سم

الأسئلة ذات الإجابات القصيرة:

⑥ فى الشكل المقابل: أوجد قيمة كل من س، ص

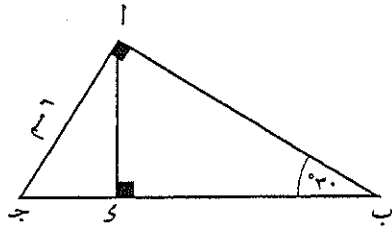
الأطوال مقدرة بالسنتيمترات.

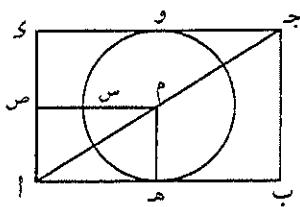
⑦ أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ، ء ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$. رسم $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ء و}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$.

أثبت أن: $\frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ و}}=\frac{\text{ء هـ}}{\text{ء و}}$

⑧ فى الشكل المقابل: $\overline{أب} \perp \overline{أجـ}$ ، $\overline{أ ى} \perp \overline{ب جـ}$

ق (∠ ب) = ٣٠° ، أ جـ = ٦ سم

أوجد طول كل من: $\overline{أب}$ ، $\overline{ب ى}$ ، $\overline{أ ى}$

التمارين ذات الإجابات الطويلة:

⑨ أ ب جـ ى شبه منحرف تقاطع قطراه فى هـ، إذا كان $\overline{أ ى}$ // $\overline{ب جـ}$ أثبت أن: $\frac{أ هـ}{هـ جـ} = \frac{ى هـ}{هـ ب}$

⑩ فى الشكل المقابل: أ ب جـ ى مستطيل، م دائرة طول نصف قطرها ٦ سم

وتمس $\overline{أب}$ عند هـ، $\overline{جـ ى}$ عند و.

رسم $\overline{م ص}$ // $\overline{أب}$ ويقطع الدائرة فى س، $\overline{أ ى}$ فى ص.

إذا كان: س ص = ٢سم، $\frac{م (\triangle أ هـ م)}{م (\triangle أ ب جـ)} = \frac{١}{٤}$

أوجد طول $\overline{ب هـ}$، $\overline{ب جـ}$

الوحدة الرابعة

نظريات التناسب في المثلث

١) المستقيمات المتوازية والاجزاء المتناسبة

٢) نظرية تاليس

٣) منصفات الزوايا والاجزاء المتناسبة

٤) تطبيقات التناسب في الدائرة

تمارين عامة علي الوحدة

اختبار الوحدة

(١) المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

نظرية (١) :-

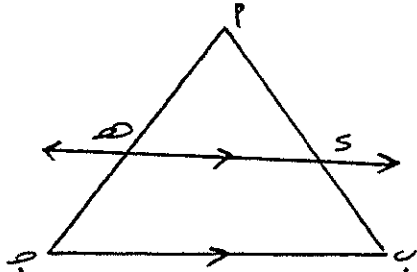
إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة .

في الشكل المقابل :- Δ أ ب ج فيه $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ // ب ج

∴

$$\frac{\text{أ د}}{\text{د ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ج}}$$

لاحظ أنه :-

∵ $\frac{\text{أ د}}{\text{د ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ج}}$ ⟸ $\frac{\text{أ د} + \text{د ب}}{\text{د ب}} = \frac{\text{أ هـ} + \text{هـ ج}}{\text{هـ ج}}$

$\left(\frac{\text{مقدم} + \text{تالي}}{\text{تالي}} = \frac{\text{مقدم} + \text{تالي}}{\text{تالي}}\right)$ "من خواص التناسب"

أي أنه : $\frac{\text{أ ب}}{\text{د ب}} = \frac{\text{أ ج}}{\text{هـ ج}}$

وعليه نستنتج أيضاً : $\frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ج}}$

مثال ① :- في الشكل المقابل :-

أوجد طول $\overline{\text{أ هـ}}$

الحل :- ∵ $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب ج}}$

∴ $\frac{\text{أ د}}{\text{د ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ج}}$ ⟸ $\frac{4}{2} = \frac{\text{أ هـ}}{3}$ ⟸ أ هـ $= \frac{3 \times 4}{2} = 6$ سم #

مثال ② :- في الشكل المقابل :-

أوجد قيمة س

الحل :- ∵ $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{أ ج}}$

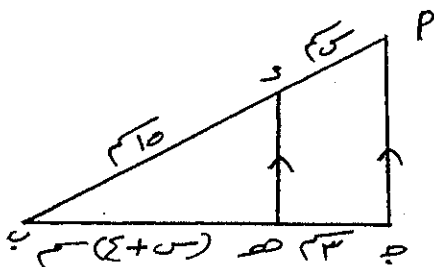
∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ج}} = \frac{\text{ب د}}{\text{د أ}}$ ⟸ $\frac{\text{س} + 4}{3} = \frac{15}{\text{س}}$ ⟸ س (س + ٤) = ٤٥ ⟸ س² + ٤ س = ٤٥

∴ س² + ٤ س − ٤٥ = ٠ ⟸ (س + ٩)(س − ٥) = ٠ ⟸ س = −٩ (مرفوض)

⟸ س = ٥ #

* تدريب * (١) في الشكل المقابل :-

△ أ ب جـ فيه د ∈ $\overline{أب}$ ، هـ ∈ $\overline{أجـ}$

أوجد طول $\overline{أهـ}$

(٢) أوجد قيمة س العددية في كل مما يأتي :-

" نتيجة " :- إذا رسم مستقيم خارج مثلث أ ب جـ يوازي ضلعاً من أضلاع المثلث ،

وليكن ب جـ ويقطع $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ في د ، هـ على الترتيب فإن $\frac{أب}{بد} = \frac{أجـ}{جـهـ}$

في الشكل المقابل :- بتطبيق خواص التناسب

نستنتج أن :- $\frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ}$ ، $\frac{أد}{بد} = \frac{أهـ}{جـهـ}$

مثال ③ :- في الشكل المقابل :-

أوجد قيمة س .

الحل :- ∵ $\overline{دهـ} // \overline{بجـ}$

∴ $\frac{أب}{أهـ} = \frac{أجـ}{أد}$ ⇐ $\frac{٦}{٢} = \frac{٩}{س-١}$ ⇐ ٣(س - ١) = ٩　(÷ ٣)

⇐ س - ١ = ٣ ⇐ س = ٤

مثال ④ :- في الشكل المقابل :-

أوجد طول كل من $\overline{أهـ}$ ، $\overline{دس}$

الحل :- ∵ $\overline{هـد} // \overline{جـب}$ ∴ $\frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ}$

$\because \frac{12}{6} = \frac{أهـ}{5} \Leftarrow أهـ = \frac{12 \times 5}{6} = 10$ سم .

في $\triangle$ أهـ د $\because$ س ص // هـ د $\therefore \frac{أهـ}{هـ ص} = \frac{أد}{د س}$

$\Leftarrow \frac{10}{4} = \frac{12}{س} \Leftarrow$ د س $= \frac{12 \times 4}{10} = 4{,}8$ سم .

*** تدريب *** (1) في الشكل المقابل :-

د هـ // ب جـ ، أب = 6 سم ، أد = 3,75

أهـ = 2 سم ، أجـ = (س + 1) سم أوجد قيمة س

(2) في الشكل المقابل :-

[أ] إذا كان أب = 8 سم ، ب جـ = 9 سم ، ب هـ = 12 سم أوجد ب د .

[ب] إذا كان أب = 6 سم ، ب هـ = 9 سم ، جـ د = 18 سم أوجد ب جـ .

عكس نظرية (1) :-

إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث ، وقسمها إلى قطع أطوالها متناسبة فإنه يوازي الضلع الثالث .

في الشكل المقابل :-

إذا كان $\frac{أد}{د ب} = \frac{أهـ}{هـ جـ}$

فإن $\overleftrightarrow{د هـ} // \overleftrightarrow{ب جـ}$

مثال (5) :- في الشكل المقابل :- اثبت أن د هـ // ب جـ

الحل :- $\triangle$ أ ب جـ فيه :- $\frac{أد}{د ب} = \frac{6}{3} = 2$ ، $\frac{أهـ}{هـ جـ} = \frac{8}{4} = 2$

$\therefore \frac{أد}{د ب} = \frac{أهـ}{هـ جـ} \Leftarrow$ د هـ // ب جـ #

مثال (٦) :- في الشكل المقابل :- أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ

(١) اثبت أن د هـ // ب جـ

(٢) أوجد طول ب جـ

الحل :-

∵ △ أ د هـ قائم في أ ⇐ (أ د)^2 = (د هـ)^2 − (أ هـ)^2 "فيثاغورث"

∴ (أ د)^2 = ٢٥ − ١٦ = ٩ ⇐ أ د = ٣ سم

∵ أ د / د ب = ٣ / ٦ = ١/٢ ، أ هـ / هـ جـ = ٤ / ٨ = ١/٢

∴ أ د / د ب = أ هـ / هـ جـ ∴ د هـ // ب جـ #

∵ △ أ د هـ ~ △ أ ب جـ ∴ أ د / أ ب = د هـ / ب جـ

∴ ٣ / ٩ = ٥ / ب جـ ⇐ ب جـ = (٥ × ٩) / ٣ = ١٥ سم #

---

* تدريب * في كل من الأشكال الآتية حدد ما إذا كان د هـ // ب جـ أم لا

مثال (٧) :- أ ب جـ د شكل رباعي فيه س ∈ أ ب ، ص ∈ أ جـ حيث س ص // ب جـ

رسم ص ع // جـ د ويقطع أ د في ع . اثبت أن س ع // ب د

الحل :- في △ أ ب جـ

∵ س ص // ب جـ ∴ أ س / س ب = أ ص / ص جـ ← (١)

في △ أ د جـ

∵ ص ع // جـ د ∴ أ ع / ع د = أ ص / ص جـ ← (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن أ س / س ب = أ ع / ع د

في △ أ ب د ∵ أ س / س ب = أ ع / ع د ∴ س ع // ب د #

*** تدريب *** أ ب جـ د شكل رباعي تتقاطع قطراه في م . رسم $\overrightarrow{م هـ}$ // $\overline{أ د}$ وتقطع $\overline{أ ب}$ في هـ ورسم $\overrightarrow{م و}$ // $\overline{جـ د}$ وتقطع $\overline{ب جـ}$ في و . أثبت أن $\overline{هـ و}$ // $\overline{أ جـ}$.

مثال ① :- إذا كان هـ ، و ، س ، ص منتصفات الأضلاع $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ د}$ ، $\overline{د أ}$ من الشكل الرباعي أ ب جـ د . هل الشكل هـ و س ص متوازي أضلاع ؟

الحل :- العمل :- نرسم $\overline{ب د}$

• في Δ أ ب د :- ∵ هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ، ص منتصف $\overline{أ د}$

∴ $\overline{ص هـ}$ // $\overline{د ب}$ ، ص هـ = $\frac{1}{2}$ د ب ← ①

• في Δ جـ ب د :- ∵ و منتصف $\overline{ب جـ}$ ، س منتصف $\overline{د جـ}$

∴ $\overline{و س}$ // $\overline{د ب}$ ، و س = $\frac{1}{2}$ د ب ← ②

من ① ، ② ينتج أن $\overline{ص هـ}$ // $\overline{و س}$ ، ص هـ = و س ∴ الشكل هـ و س ص متوازي أضلاع #

مثال ② :- في الشكل المقابل :- أ ب جـ مثلث ، د ∈ $\overline{أ جـ}$

$\overline{د هـ}$ // $\overline{أ ب}$ ، $\overline{د و}$ // $\overline{أ هـ}$. اثبت أن $(جـ هـ)^2$ = جـ و × جـ ب

البرهان :-

• في Δ أ ب جـ :-

∵ $\overline{د هـ}$ // $\overline{أ ب}$ ∴ $\frac{جـ هـ}{جـ ب} = \frac{جـ د}{جـ أ}$ ← ①

• في Δ أ هـ جـ :-

∵ $\overline{د و}$ // $\overline{أ هـ}$ ∴ $\frac{جـ و}{جـ هـ} = \frac{جـ د}{جـ أ}$ ← ②

من ① ، ② ⇐ $\frac{جـ هـ}{جـ ب} = \frac{جـ و}{جـ هـ}$ ⇐ $(جـ هـ)^2$ = جـ و × جـ ب #

مثال ⑩ :- أ ب جـ مثلث ، د ∈ $\overline{أب}$ حيث ٣ أ د = ٢ د ب ، هـ ∈ $\overline{أجـ}$ حيث ٥ جـ هـ = ٣ أ جـ

رسم $\overline{أس}$ يقطع $\overline{بجـ}$ في س . وإذا كان أ و = ٨ سم ، أ س = ٢٠ سم ، حيث و ∈ $\overline{أس}$

اثبت أن النقط د ، و ، هـ على استقامة واحدة .

الحل :- ∵ ٣ أ د = ٢ د ب ⇐ $\frac{أد}{دب} = \frac{٢}{٣}$

∵ ٥ جـ هـ = ٣ أ جـ ⇐ $\frac{جـهـ}{أجـ} = \frac{٣}{٥}$

الحل :- في △ أ ب س

∵ $\frac{أد}{دب} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{أو}{وس} = \frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{أد}{دب} = \frac{أو}{وس}$ ∴ $\overline{دو}$ // $\overline{بس}$ ← ①

في △ أ جـ س

∵ $\frac{أهـ}{هـجـ} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{أو}{وس} = \frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{أهـ}{هـجـ} = \frac{أو}{وس}$ ∴ $\overline{وهـ}$ // $\overline{سجـ}$ ← ②

من ① ، ② ∵ و نقطة مشتركة بين $\overline{دو}$ ، $\overline{وهـ}$ ∴ النقط د ، و ، هـ على إستقامة واحدة

تمارين على "المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة"

① في الشكل المقابل ءهـ // ب جـ أكمل:

أ) إذا كان اء/ءب = ٥/٣ فإن: اب/بء = ... ، جـهـ/هـا = ...

ب) إذا كان اهـ/اجـ = ٤/٧ فإن: جـهـ/هـا = ... ، بء/اب = ...

② في الشكل المقابل ءهـ // ب جـ. حدد العبارات الصحيحة من ما يلي:

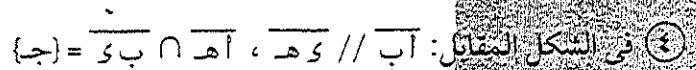
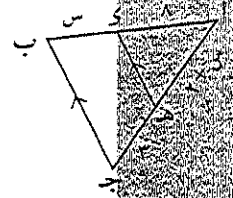
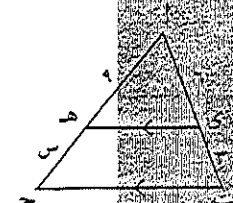
أ) اب/ءب = اهـ/هـجـ ب) اء/اهـ = بء/هـجـ

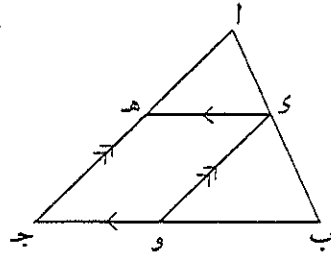
جـ) اب/بء = اجـ/اهـ د) اب/بء = اجـ/جـهـ

هـ) اجـ/اء = اب/اهـ و) جـهـ/بء = اجـ/اب

③ في كل من الأشكال التالية ءهـ // ب جـ. أوجد قيمة س العددية (الأطوال بالسنتيمترات).

④ في الشكل المقابل: اب // ءهـ ، اهـ ∩ بء = {جـ}

اجـ = ٦سم، ب جـ = ٤سم، جـء = ٣سم

أوجد طول جـهـ

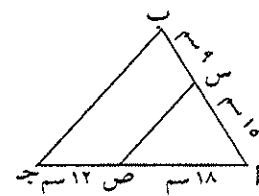
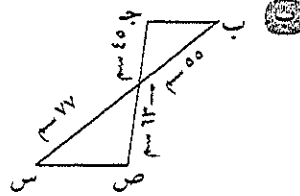
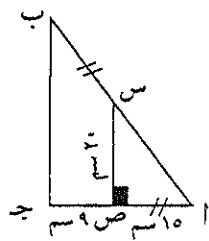
⑤ س ص ∩ ع ل = {م}، حيث س ع // ل ص، فإذا كان س م = ٩سم، ص م = ١٥سم، ع ل = ٣٦ سم.
أوجد طول ع م.

⑥ لكل مما يأتي: استخدم الشكل المقابل والبيانات المعطاة لإيجاد قيمة س:

(أ) أى = ٤ ، ب ى = ٨ ، جـ هـ = ٦ ، أ هـ = س.

(ب) أ هـ = س ، هـ جـ = ٥، أى = س − ٢ ، ى ب = ٣.

(جـ) أ ب = ٢١ ، ب و = ٨ ، و جـ = ٦ ، أى = س.

(د) أى = س ، ب و = س + ٥ ، ٢ى ب = ٣و جـ = ١٢.

⑦ فى كل من الأشكال التالية، حدد ما إذا كان س ص // ب جـ

⑧ س ص ع مثلث فيه س ص = ١٤سم، س ع = ٢١سم، ل ∈ س ص بحيث س ل = ٦,٥سم،
م ∈ س ع حيث س م = ٨,٤سم. أثبت أن ل م // ص ع

⑨ فى المثلث أ ب جـ، ى ∈ أ ب، هـ ∈ أ جـ، ٥أ هـ = ٤ هـ جـ
إذا كان أى = ١٠ سم، ى ب = ٨سم. حدد ما إذا كان ى هـ // ب جـ. فسر إجابتك.

⑩ أ ب جـ ى شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ فإذا كان أ هـ = ٦سم، ب هـ = ١٣سم، هـ و = ١٠سم،
هـ ى = ٧,٨سم. أثبت أن الشكل أ ب جـ ى شبه منحرف.

⑪ أثبت أن القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث يوازى ضلعه الثالث، وطولها يساوى نصف طول هذا الضلع.

⑫ أ ب جـ مثلث، ى ∈ أ ب حيث ٣أى = ٢ى ب، هـ ∈ أ جـ حيث ٥ جـ هـ = ٣ أ جـ، رسم أ س يقطع ب جـ فى س. إذا كان أ و = ٨سم، أ س = ٢٠سم، حيث و ∈ أ س. أثبت أن النقط ى، و، هـ على استقامة واحدة.

⑬ أ ب جـ مثلث، ى ∈ ب جـ، بحيث $\frac{ب ى}{ى جـ} = \frac{٣}{٤}$ ، هـ ∈ أ ى ، بحيث $\frac{أ هـ}{أ ى} = \frac{٣}{٧}$، رسم جـ هـ فقطع أ ب فى س،
رسم ى ص // جـ س فقطع أ ب فى ص. أثبت أن أ س = ب ص.

⑭ أ ب جـ ى مستطيل تقاطع قطراه فى م. هـ منتصف أ م ، و منتصف م جـ. رسم ى هـ يقطع أ ب فى س،
ورسم ى و يقطع ب جـ فى ص. أثبت أن: س ص // أ جـ.

(٥) " نظرية تاليس "

نظرية (١) [نظرية تاليس العامة :-

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

في الشكل المقابل :-

إذا كان ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤

، م ، مَ قاطعين لها . فإن :-

$$\frac{\text{أب}}{\text{أَبَ}} = \frac{\text{بج}}{\text{بَجَ}} = \frac{\text{جء}}{\text{جَءَ}} = \frac{\text{أج}}{\text{أَجَ}} = \ldots$$

مثال ① :- في الشكل المقابل :-

أوجد طول كل من بء ، هس

الحل :- ∵ أب // جء // هو // سص

$$\therefore \frac{\text{أج}}{\text{بء}} = \frac{\text{جه}}{\text{ءو}} = \frac{\text{هس}}{\text{وص}} \Leftarrow \frac{28}{\text{بء}} = \frac{20}{15} = \frac{\text{هس}}{33}$$

$$\therefore \text{بء} = \frac{28 \times 3}{4} = 21 \text{ سم} \quad ، \quad \text{هس} = \frac{4 \times 33}{3} = 44 \text{ سم} \quad \#$$

مثال ② :- في الشكل المقابل :-

أوجد قيمة س العددية

الحل :- ∵ أب // جء // هو

$$\therefore \frac{\text{أج}}{\text{بء}} = \frac{\text{جه}}{\text{ءو}} \Leftarrow \frac{3\text{س}}{4\text{س}-1} = \frac{2\text{س}}{3\text{س}-2}$$

$$\Leftarrow 9\text{س} - 6 = 8\text{س} - 2 \Leftarrow 9\text{س} - 8\text{س} = -2 + 6$$

$$\therefore \boxed{\text{س} = 4}$$

* تدريب * (١) في كل من الأشكال الآتية . أوجد قيم س ، ص العددية :-

"حالة خاصة" :-

إذا تقاطع المستقيمان م ، مَ في النقطة أ

وكان ب بَ // جـ جـَ فإن $\frac{أب}{أجـ} = \frac{أبَ}{أجـَ}$

وبالعكس :- إذا كان $\frac{أب}{أجـ} = \frac{أبَ}{أجـَ}$ فإن ب بَ // جـ جـَ

نظرية تاليس الخاصة :-

إذا كانت أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية فإن أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر متساوية .

في الشكل المقابل :- ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤ ، م ، مَ قاطعان لها

وكان أب = بجـ = جـ د فإن أَبَ = بَجـَ = جـَدَ .

مثال ③ :- في الشكل المقابل :-

أوجد قيمة س العددية

الحل :- ∵ أب // جـ د // هـ و

∵ ب د = د و　　∴ أجـ = جـ هـ

∴ ٢ص - ٣ = س + ٢ ⟸ ٢ص - س = ٢ + ٣ ⟸ س = ٥

∵ ب د = د و ⟸ ص + ٣ = س + ١ ⟸ ص + ٣ = ٥ + ١ ⟸ ص + ٣ = ٦ ⟸ ص = ٣

مثال ④ :- من الشكل المقابل :-

أوجد قيم س ، ص العددية .

الحل :- ∵ $\overline{أب} \parallel \overline{جـ د} \parallel \overline{هـ و}$

∴ $\frac{م أ}{م ب} = \frac{م جـ}{م د} = \frac{د و}{جـ هـ}$

⇐ $\frac{ص-٤}{٤س-١} = \frac{٢}{٣} = \frac{ص-٤}{٢س+٧}$ ⇐ ∴ $\frac{ص-٤}{٤س-١} = \frac{ص-٤}{٢س+٧}$ ⇐ ٤س − ١ = ٢س + ٧

∴ ٤س − ٢س = ٧ + ١ ⇐ ٢س = ٨ ⇐ **س = ٤** #

∴ $\frac{ص-٤}{٤س-١} = \frac{٢}{٣}$ ⇐ $\frac{ص-٤}{١٥} = \frac{٢}{٣}$ ⇐ ٣(ص − ٤) = ٣٠ $\xLeftarrow{(\div ٣)}$ ص − ٤ = ١٠

ص = ١٤ #

---

* **تدريب** * من كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة كل من س ، ص العددية :-

---

مثال ⑤ من الشكل المقابل :-

د ، هـ ، و مساقط أ ، ب ، جـ على الأفقي بنفس الترتيب

أب = ١٫٢ م ، و د = ١٢ م ، هـ د = ٠٫٨ م

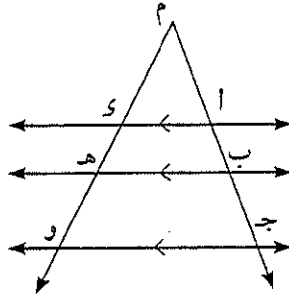
أوجد طول أجـ لأقرب متر .

الحل :- ∵ د ، هـ ، و مساقط أ ، ب ، جـ

∴ $\overline{جـ و} \parallel \overline{ب هـ} \parallel \overline{أ د}$ ∴ $\frac{أجـ}{أب} = \frac{د و}{د هـ}$ ⇐ $\frac{أجـ}{١٫٢} = \frac{١٢+٠٫٨}{٠٫٨}$

∴ أجـ = $\frac{١٫٢ \times ١٢٫٨}{٠٫٨}$ = ١٩٫٢ م . #

تماريـن على " نظرية تاليس "

⑮ اكتب ما تساويه كل من النسب التالية مستخدمًا الشكل المقابل:

(أ) $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ى هـ}}{\cdots\cdots}$ (ب) $\frac{\text{أجـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\cdots\cdots}{\text{هـ و}}$

(جـ) $\frac{\text{م أ}}{\text{أب}} = \frac{\text{م ى}}{\cdots\cdots}$ (د) $\frac{\text{أجـ}}{\text{أب}} = \frac{\cdots\cdots}{\text{ى هـ}}$

(هـ) $\frac{\text{م ب}}{\text{أب}} = \frac{\cdots\cdots}{\text{ى هـ}}$ (و) $\frac{\text{م جـ}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{م و}}{\cdots\cdots}$

(ز) $\frac{\text{ب جـ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{هـ و}}{\cdots\cdots}$ (ح) $\frac{\text{ى و}}{\text{م و}} = \frac{\text{أجـ}}{\cdots\cdots}$

⑯ فى كل من الأشكال التالية، احسب قيم س، ص العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

⑰ فى الشكل المقابل:

$\overline{\text{أب}} \cap \overline{\text{جـ ى}} = \{\text{م}\}$، هـ $\in$ $\overline{\text{م ب}}$ ،

و $\in$ $\overline{\text{م ى}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ // $\overline{\text{و هـ}}$ // $\overline{\text{ى ب}}$

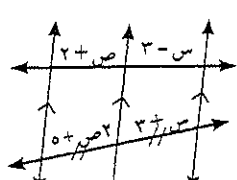
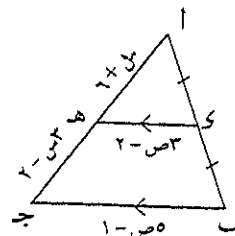
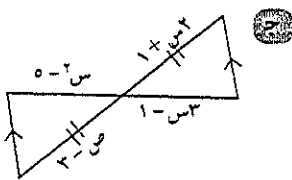
أوجد:

(أ) طول $\overline{\text{م و}}$

(ب) طول $\overline{\text{أم}}$

⑱ $\overleftrightarrow{\text{أب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ ى}} = \{\text{هـ}\}$، س $\in$ $\overline{\text{أب}}$ ، ص $\in$ $\overline{\text{جـ ى}}$ ، وكان $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب ى}}$ // $\overline{\text{أجـ}}$

أثبت أن: أس × هـ ى = جـ ص × هـ ب

⑲ فى كل من الأشكال التالية، احسب قيم س، ص العددية:

⑳ ا ب جـ ى شكل رباعى فيه $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{جـ ى}}$ ، تقاطع قطراه فى م، نصف $\overline{\text{ب جـ}}$ فى هـ، ورسم $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overrightarrow{\text{ب أ}}$، ويقطع $\overline{\text{ب ى}}$ فى س ، $\overline{\text{أجـ}}$ فى ص ، $\overline{\text{أى}}$ فى و.

أثبت أن:

(أ) هـ ص = $\frac{1}{2}$ أب. (ب) $\frac{\text{أص}}{\text{جـ م}} = \frac{\text{ب س}}{\text{ى م}}$

(٣) منصفات الزوايا والأجزاء المتناسبة

نظرية (٣) :-

إذا نُصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس تقسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين.

في الشكل المقابل :- أ ب جـ مثلث

أ د ينصف ∠ ب أ جـ (من الداخل في شكل أ ، من الخارج في شكل ب)

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

البرهان :-

∵ أ د ينصف ∠ ب أ جـ　　∴ ∠١ ≡ ∠٢

∵ جـ هـ // أ د　　∴ ∠١ ≡ ∠٤ (بالتبادل) ، ∠٣ ≡ ∠٢ (بالتناظر)

∵ ∠١ ≡ ∠٢　　∴ ∠٣ ≡ ∠٤　　∴ أ هـ ≡ أ جـ　(١)

∵ جـ هـ // أ د　　∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ هـ}}$　(٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ #

مثال ① :- أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٨ سم ، أ جـ = ٦ سم ، ب جـ = ٧ سم ، رسم $\overrightarrow{\text{أ د}}$ ينصف ∠ ب أ جـ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في د أوجد طول كل من $\overline{\text{ب د}}$ ، $\overline{\text{د جـ}}$

الحل :-

∵ $\overrightarrow{أد}$ ينصف ∠ ب أ جـ ∴ $\frac{بد}{جـد} = \frac{أب}{أجـ}$

$\frac{بد}{٧ - بد} = \frac{٨}{٦}$ ⟸ ٣ بد = ٢٨ − ٤ بد

⟸ ٧ بد = ٢٨ ⟸(÷٧) بد = ٤ سم ، جـد = ٣ سم

مثال ② Δ أ ب جـ فيه $\overrightarrow{أد}$ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند أ ويقطع $\overrightarrow{جـب}$ في د فإذا كان أب = ٦ سم ، أجـ = ٨ سم ، جـد = ٢٠ سم . أوجد طول $\overline{بجـ}$.

الحل :- ∵ $\overrightarrow{أد}$ ينصف ∠ أ الخارجة

∴ $\frac{جـد}{بد} = \frac{جـأ}{أب}$ ⟸ $\frac{٦}{٨} = \frac{بد}{٢٠}$

⟸ بد = $\frac{٦ \times ٢٠}{٨}$ = ١٥ سم ∴ بجـ = ٢٠ − ١٥ = ٥ سم

** تدريب ** في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة س العددية :-

مثال ③ :- أ ب جـ مثلث رسم $\overrightarrow{بد}$ ينصف ∠ ب ويقطع $\overline{أجـ}$ في د ، حيث أد = ١٤ سم ، دجـ = ١٨ سم اذا كان محيط Δ أ ب جـ = ٨٠ سم أوجد طول كل من $\overline{بجـ}$ ، $\overline{أب}$

الحل :- ∵ $\overrightarrow{بد}$ ينصف ∠ ب ⟸ $\frac{أد}{جـد} = \frac{أب}{بجـ}$

⟸ $\frac{١٤}{١٨} = \frac{أب}{بجـ}$ ⟸ نفرض أن أب = ٧ س ، بجـ = ٩ س

∵ محيط Δ أبجـ = ٨٠ سم ⟸ أب + بجـ + أجـ = ٨٠

٧ س + ٩ س + ٣٢ = ٨٠ ⟸ ١٦ س = ٤٨ ⟸ س = $\frac{٤٨}{١٦}$ = ٣

∴ أب = ٧ × ٣ = ٢١ سم ، بجـ = ٩ × ٣ = ٢٧ سم #

مثال ④ :- أ ب جـ مثلث ، س منتصف ب جـ ، نصفت ∠ أ س ب بمنصف قطع أ ب في د ونصفت ∠ أ س جـ بمنصف قطع أ جـ في هـ . اثبت أن د هـ // ب جـ

الحل :- في △ أ س ب

∵ س د ينصف ∠ أ س ب ∴ $\frac{أد}{دب} = \frac{أس}{سب}$ ← (1)

في △ أ س جـ ∵ س هـ ينصف ∠ أ س جـ

∴ $\frac{أهـ}{هـجـ} = \frac{أس}{سجـ}$ ← (2)

من (1) ، (2) مع العلم أن س ب = س جـ

∴ $\frac{أد}{دب} = \frac{أهـ}{هـجـ}$ ∴ د هـ // ب جـ #

مثال ⑤ :- في الشكل المقابل :-

أوجد طول ب د

الحل :- ∵ أو ينصف ∠ ب أ جـ ، ب و ينصف ∠ أ ب جـ

∴ و هي نقطة تقاطع منصفات زوايا △ أ ب جـ

∴ جـ و ينصف ∠ أ جـ ب ∴ $\frac{أد}{دب} = \frac{أجـ}{جـب}$

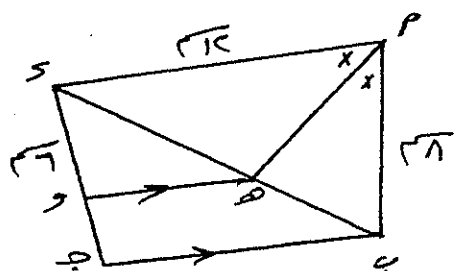
⟸ $\frac{٢}{دب} = \frac{٤}{٨}$ ⟸ د ب = $\frac{٢ \times ٨}{٤}$ = ٤ سم .

ملحوظة :- منصفات زوايا المثلث تتقاطع جميعًا في نقطة واحدة

---

* تدريب * (1) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب . رسم أ د ينصف ∠ أ ويقطع ب جـ في د إذا كان طول ب د = ٢٤ سم ، ب أ : أ جـ = ٣ : ٥ فأوجد محيط △ أ ب جـ

(٢) في الشكل المقابل :-

أوجد طول د جـ .

"ملاحظات هامة"

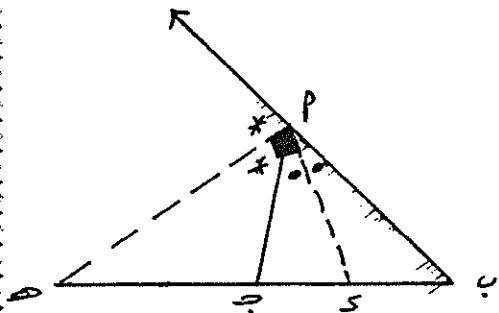
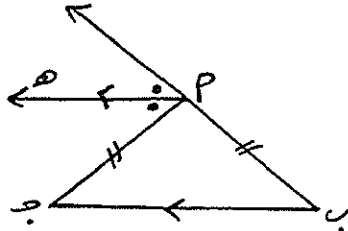
① في الشكل المقابل :- إذا كان $\overrightarrow{\text{أد}}$ ، $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصفان الزاوية أ والزاوية الخارجة للمثلث عند أ على الترتيب فإن :-

$\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$ و $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$ ∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$

∴ القاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$ تنقسم من الداخل في د ومن الخارج في هـ بنفس النسبة (أب : أجـ)

ويلاحظ أن :- المنصفين الداخلي والخارجي $\overrightarrow{\text{أد}}$ ، $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ متعامدان أي ق(∠د أ هـ) = ٩٠°

② في الشكل المقابل :- إذا كان $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث أ ب جـ عند أ حيث هـ ∉ ب جـ وكان أب = أجـ

فإن $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

أي أن المنصف الخارجي لزاوية رأس مثلث متساوي الساقين يكون موازياً للقاعدة

مثال ⑥ :- أ ب جـ مثلث فيه أب = ٦ سم ، أجـ = ٤ سم ، ب جـ = ٥ سم ، رسم $\overrightarrow{\text{أد}}$ ينصف ∠أ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في د ورسم $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠أ الخارجة ويقطع $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ في هـ أحسب د هـ

الحل :- ∵ $\overrightarrow{\text{أد}}$ ينصف ∠ب أ جـ

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$ ⟸ $\frac{\text{ب د}}{\text{٥ − ب د}} = \frac{٦}{٤}$

⟸ ٢ ب د = ١٥ − ٣ ب د ⟸ ٥ ب د = ١٥ ⟸ ب د = ٣ سم

∴ د جـ = ٥ − ٣ = ٢ سم .

∵ $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠أ الخارجة .

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$ ⟸ $\frac{\text{٥ + هـ جـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{٦}{٤}$ ⟸ ٣ هـ جـ = ١٠ + ٢ هـ جـ

∴ هـ جـ = ١٠ سم

∴ د هـ = هـ جـ + جـ د = ١٠ + ٢ = ١٢ سم

مثال (٧) :- أب جـ مثلث فيه أب = ٣ سم ، ب جـ = ٧ سم ، جـ أ = ٦ سم . رسم $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{بجـ}$ في ء ورسم $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠ أ الخارجة ويقطع $\overrightarrow{جـب}$ في هـ .

(١) اثبت أن $\overline{أب}$ متوسط في Δ أجـ هـ

(٢) أوجد النسبة بين مساحة Δ أءهـ ، ومساحة Δ أجـ هـ

الحل :- ∵ $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ أ

$$\Leftarrow \frac{جـء}{ءب} = \frac{جـأ}{أب} \Leftarrow \frac{جـء}{٧ - جـء} = \frac{٢}{١}$$

$$\Leftarrow جـء = ١٤ - ٢جـء \Leftarrow ٣جـء = ١٤ \Leftarrow جـء = \frac{١٤}{٣} \text{ سم}$$

$$\therefore بء = ٧ - \frac{١٤}{٣} = \frac{٧}{٣} \text{ سم}$$

∵ $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠ أ الخارجة $\Leftarrow \frac{جـهـ}{هـب} = \frac{جـأ}{أب} \Leftarrow \frac{٧ + هـب}{هـب} = \frac{٢}{١}$

$$\Leftarrow ٢هـب = ٧ + هـب \Leftarrow هـب = ٧ \text{ سم} \quad ، \quad هـء = ٧ + \frac{٧}{٣} = \frac{٢٨}{٣} \text{ سم}$$

∵ بء ≠ هـب = ٧ سم ∴ ب منتصف $\overline{هـجـ}$ ∴ $\overline{أب}$ متوسط في Δ أجـ هـ #

$$\therefore \frac{م(\Delta أءهـ)}{م(\Delta أجـهـ)} = \frac{هـء}{جـهـ} = \frac{\frac{٢٨}{٣}}{١٤} = \frac{٢}{٣}$$ (لأن لهما نفس الارتفاع)

إيجاد طول المنصف الداخلي والمنصف الخارجي لزاوية رأس مثلث :-

تمرين مشهور :-

إذا كان $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ أ في Δ أب جـ من الداخل ويقطع $\overline{بجـ}$ في ء

فإن $أء = \sqrt{أب \times أجـ - بء \times ءجـ}$

ملاحظة :- إذا كان $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠ بأجـ من الخارج ويقطع $\overrightarrow{بجـ}$ في هـ فإن

$أهـ = \sqrt{ب هـ \times هـ جـ - أب \times أجـ}$

مثال ⑧ :- في الشكل المقابل :-

أوجد طول $\overline{أد}$

الحل :- ∵ $\overrightarrow{أد}$ ينصف ∠أ

∴ $\frac{بد}{دجـ} = \frac{أب}{أجـ} \Leftarrow \frac{3}{دجـ} = \frac{6}{8} \Leftarrow دجـ = \frac{8 \times 3}{6} = 4$ سم .

∴ $أد = \sqrt{أب \times أجـ - بد \times دجـ} = \sqrt{6 \times 8 - 3 \times 4} = \sqrt{48 - 12} = \sqrt{36} = 6$ سم

مثال ⑨ :- في الشكل المقابل :-

أوجد طول $\overline{أهـ}$

الحل :- ∵ $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠أ الخارجة

∴ $\frac{بهـ}{هـجـ} = \frac{أب}{أجـ} \Leftarrow \frac{18}{هـجـ} = \frac{6}{4} \Leftarrow هـجـ = \frac{18 \times 4}{6} = 12$ سم .

∴ $أهـ = \sqrt{بهـ \times هـجـ - أب \times أجـ} = \sqrt{18 \times 12 - 6 \times 4} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$ سم .

مثال ⑩ :- في الشكل المقابل :-

اثبت أن $\overline{هـو} \parallel \overline{بجـ}$

الحل :- ∵ $\overrightarrow{بهـ}$ ينصف ∠أبد

∴ $\frac{أهـ}{هـب} = \frac{أب}{بد}$ ← (1)

∵ $\overrightarrow{دو}$ ينصف ∠أدجـ　∴ $\frac{أو}{وجـ} = \frac{أد}{دجـ}$ ← (2)

∵ أب = أد ، بد = دجـ　من ① $\Leftarrow \frac{أهـ}{هـب} = \frac{أد}{دجـ}$ ← ③

من ٢ ، ٣ $\Leftarrow \frac{أهـ}{هـب} = \frac{أو}{وجـ}$　∴ $\overline{هـو} \parallel \overline{دجـ}$ #

* تدريب * من كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة س ، ص :-

عكس نظرية (٣) :- من الشكل المقابل :-

• إذا كانت د ∈ ب ج (شكل ١) بحيث $\frac{ب د}{د ج} = \frac{أ ب}{أ ج}$

∴ أد ينصف ∠ ب أ ج

• إذا كانت د ∈ ب ج ، د ∉ ب ج (شكل ٢)

بحيث $\frac{ب د}{د ج} = \frac{أ ب}{أ ج}$ ∴ أد ينصف ∠ أ الخارجة

مثال ⑪ :- من الشكل المقابل :- د و ينصف ∠ أ د ج

اثبت أن ب و ينصف ∠ أ ب ج

الحل :- من △ أ د ج

∵ د و ينصف ∠ د ∴ $\frac{أ و}{و ج} = \frac{أ د}{د ج}$

∴ $\frac{أ و}{و ج} = \frac{٨}{٦} \Leftarrow \frac{أ و}{و ج} = \frac{٤}{٣}$ ← (١)

من △ أ ب ج ∴ $\frac{أ ب}{ب ج} = \frac{١٢}{٩} \Leftarrow \frac{أ ب}{ب ج} = \frac{٤}{٣}$ ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن $\frac{أ و}{و ج} = \frac{أ ب}{ب ج}$ ∴ ب و ينصف ∠ أ ب ج #.

* تدريب * من الشكل المقابل :- د و ينصف ∠ د

اثبت أن ب و ينصف ∠ ب

مثال ⑫ :- أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ١٨ سم ، ب جـ = ١٥ سم ، أ جـ = ١٢ سم ، ء ∈ ب جـ حيث ب ء = ٩ سم رسم أهـ ⊥ أ ء فقطع ب جـ في هـ . اثبت أن أ ء ينصف ∠ ب أ جـ ثم أوجد طول جـ هـ

الحل :- في Δ أ ب جـ

∵ $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{١٨}{١٢} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{أ ب}{أ جـ}$ ∴ أ ء ينصف ∠ ب أ جـ #

∵ أهـ ⊥ أ ء ويقطع ب جـ في هـ ∴ أهـ ينصف ∠ أ الخارجة عن Δ أ ب جـ

حيث أن المنصفان الداخلى والخارجى يكونان متعامدان .

∴ $\frac{ب هـ}{هـ جـ} = \frac{أ ب}{أ جـ}$ ⇐ $\frac{هـ جـ + ١٥}{هـ جـ} = \frac{١٨}{١٢}$ ⇐ ٣ هـ جـ = ٣٠ + ٢ هـ جـ

∴ هـ جـ = ٣٠ سم #

مثال ⑬ :- أ ب قطر في دائرة ، أ جـ وتر فيها . رسم جـ ء مماس للدائرة عند جـ فقطع أ ب في ء . إذا كانت هـ ∈ أ ب بحيث $\frac{ء ب}{ب هـ} = \frac{ء جـ}{جـ هـ}$. اثبت أن :-

(١) أ جـ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث جـ ء هـ عند جـ (٢) $\frac{ء أ}{ء ب} = \frac{أ هـ}{ب هـ}$

الحل :- ∵ $\frac{ء ب}{ب هـ} = \frac{ء جـ}{جـ هـ}$ ① ∴ جـ ب ينصف ∠ ء جـ هـ

∵ أ ب قطر ∴ ق(∠ أ جـ ب) = ٩٠° " محيطية في نصف دائرة "

ويكون جـ أ ⊥ جـ ب ∴ جـ ب ينصف ∠ جـ الخارجة عن Δ أ ب جـ

∴ أ جـ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث جـ ء هـ عند جـ # " المنصفان متعامدان "

ويكون $\frac{ء أ}{أ هـ} = \frac{ء جـ}{جـ هـ}$ ②

من ① ، ② ينتج أن $\frac{ء أ}{أ هـ} = \frac{ء ب}{ب هـ}$ ⇐ $\frac{ء أ}{ء ب} = \frac{أ هـ}{ب هـ}$ # " خواص التناسب "

* تدريب * أ ب ج د شكل رباعي فيه أ ب = ١٨ سم ، ب ج = ١٢ سم ، هـ ∈ أ د حيث أ هـ = ٣ هـ د . رسم هـ و // د ج يقطع أ ج في و . أثبت أن ب و ينصف ∠ أ ب ج

مثال ⑭ :- دائرتان م ، ن متماستان من الخارج في أ . رسم مستقيم يوازي م ن يقطع الدائرة م في ب ، ج والدائرة ن في د ، هـ على الترتيب . فإذا تقاطع ب م ، هـ ن في النقطة و . أثبت أن أ و ينصف ∠ م و ن .

الحل :- ∵ ب هـ // م ن

∴ $\frac{ب م}{م و} = \frac{هـ ن}{ن و}$ ← (١)

∵ ب م = م أ ، هـ ن = ن أ "أنصاف أقطار"

من ① ⇐ $\frac{م أ}{و م} = \frac{ن أ}{ن و}$ ⇐ $\frac{م أ}{أ ن} = \frac{و م}{و ن}$

∴ و أ ينصف ∠ م و ن #

مثال ⑮ :- من الشكل المقابل :-

اثبت أن أ و ينصف ∠ ج أ د

الحل :- ∵ أ هـ ينصف ∠ ب أ ج

∴ $\frac{ب هـ}{هـ ج} = \frac{أ ب}{أ ج}$ ← (١)

∵ هـ و // ب د ∴ $\frac{ب هـ}{هـ ج} = \frac{د و}{و ج}$ ← (٢)

من ١ ، ٢ ⇐ $\frac{أ ب}{أ ج} = \frac{د و}{و ج}$ ∵ أ ب = أ د

∴ $\frac{أ د}{أ ج} = \frac{د و}{و ج}$ ∴ أ و ينصف ∠ ج أ د #

" تمارين على منصفات الزوايا والاجزاء المتناسبة "

① فى الشكل المقابل: $\overline{اى}$ ينصف ∠ا . أكمل:

ⓐ $\frac{ب ى}{ى جـ}$ = ... ⓑ $\frac{ا جـ}{ا ب}$ = ...

ⓒ $\frac{ب ى}{ب ا}$ = ... ⓓ ا ب × جـ ى = ...

② فى كل من الأشكال التالية، أوجد قيمة س (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

ⓐ ⓑ

ⓒ ⓓ

③ ا ب جـ مثلث محيطه ٢٧سم، رسم $\overleftrightarrow{ب ى}$ ينصف ∠ ب ويقطع $\overline{ا جـ}$ فى ى.
إذا كان ا ى = ٤سم، جـ ى = ٥سم، أوجد طول كل من $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{ا ى}$

④ فى كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س، ثم أوجد محيط △ا ب جـ.

ⓐ ⓑ ⓒ

⑤ ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ٨سم، ا جـ = ٤سم، ب جـ = ٦سم، رسم $\overleftrightarrow{ا ى}$ ينصف ا ويقطع $\overline{ب جـ}$ فى ى ورسم $\overleftrightarrow{ا هـ}$ ينصف ∠ا الخارجة ويقطع $\overleftrightarrow{ب جـ}$ فى هـ أوجد طول كل من ى هـ، $\overline{ا ى}$ ، $\overline{ا هـ}$

⑥ فى كل من الأشكال التالية: أثبت أن $\overline{\text{س ص}} // \overline{\text{ب جـ}}$

(أ)

(ب)

....

....

⑦ فى كل من الأشكال التالية، أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠أ ب جـ

(أ)

(ب)

....

....

⑧ فى الشكل المقابل: $\overline{\text{هـ ء}} // \overline{\text{س ص}} // \overline{\text{ب جـ}}$،
أ ء × ب س = أ جـ × هـ س.
أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{أ ص}}$ ينصف ∠جـ أ ء.

....

....

⑨ أ ب جـ مثلث ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$، ء ∉ $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث جـ ء = أ ب. رسم $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}} // \overline{\text{ء أ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ب}}$ فى هـ، ورسم $\overleftrightarrow{\text{هـ و}} // \overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ فى و أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{ب و}}$ ينصف ∠أ ب جـ

....

⑩ فى الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٦سم، أ جـ = ٩سم، ب جـ = ١٠سم. ء ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث ب ء = ٤سم.
رسم $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{أ ء}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ء}}$، $\overline{\text{أ ب}}$ فى هـ، و على الترتيب.
(أ) أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠أ.
(ب) أوجد م (△أ ب و) : م (△جـ ب و)

(٤) "تطبيقات التناسب في الدائرة"

أولاً :- قوة نقطة بالنسبة للدائرة :-

تعريف :- قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م التي طول نصف قطرها نق هو العدد الحقيقي $ق_م(أ)$ حيث $ق_م(أ) = (أم)^2 - نق^2$

"ملاحظة هامة" :-

يمكن التنبؤ بموقع نقطة أ بالنسبة لدائرة م

فإذا كان :-
- $ق_م(أ) > 0$ فإن أ تقع خارج الدائرة.
- $ق_م(أ) = 0$ فإن أ تقع على الدائرة.
- $ق_م(أ) < 0$ فإن أ تقع داخل الدائرة.

مثال ① :- حدد موقع كل من النقط أ، ب، ج بالنسبة للدائرة م التي طول نصف قطرها ٤ سم ثم احسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة في الحالات التالية :-

(١) $ق_م(أ) = 9$ ، (٢) $ق_م(ب) =$ صفر ، (٣) $ق_م(ج) = -7$

الحل :-

(١) ∵ $ق_م(أ) = 9 > 0$ ∴ أ تقع خارج الدائرة.

∵ $ق_م(أ) = (أم)^2 - نق^2 \Leftarrow 9 = (أم)^2 - 16 \Leftarrow (أم)^2 = 25$ ∴ أم = ٥ سم

(٢) ∵ $ق_م(ب) = 0$ ∴ ب تقع على الدائرة. ∴ بم = ٤ سم

(٣) ∵ $ق_م(ج) = -7 < 0$ ∴ ج تقع داخل الدائرة.

∵ $ق_م(ج) = (جم)^2 - نق^2 \Leftarrow -7 = (جم)^2 - 16 \Leftarrow (أم)^2 = 9$ ∴ أم = ٣ سم

تدريب حدد موقع كل من النقط أ، ب، ج بالنسبة للدائرة ن التي طول نصف قطرها ٣ سم ثم احسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة في الحالات التالية :-

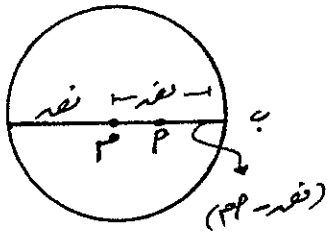
(١) $ق(أ) = 15$ ، (٢) $ق(ب) =$ صفر ، (٣) $ق(ج) = -4$

"ملحوظة هامة" :-

① إذا وقعت النقطة أ خارج الدائرة م فإن :-

$ق_م(أ) = (أم)^2 - نق^2 \Leftarrow ق_م(أ) = (أم - نق)(أم + نق)$

$= أب \times أجـ = (أد)^2$

∴ طول المماس المرسوم من النقطة أ للدائرة م $= \sqrt{ق_م(أ)}$

② اذا وقعت النقطة أ داخل الدائرة م فإن :-

$ق_م(أ) = (أم)^2 - نق^2 \Leftarrow ق_م(أ) = (أم - نق)(أم + نق)$

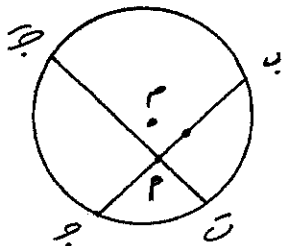
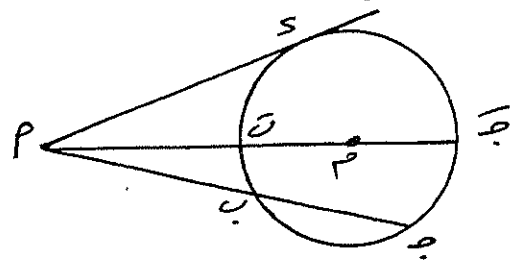
$\Leftarrow ق_م(أ) = -(نق - أم)(أم + نق) = -أب \times أجـ$

⊛ "والصيغة عامة"

(١) أ خارج الدائرة م

$ق_م(أ) = أب \times أجـ = أبَ \times أجـَ = (أد)^2$

(٢) أ داخل الدائرة م

$ق_م(أ) = -أب \times أجـ = -أبَ \times أجـَ$

مثال ① دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ٣ سم ، أ تبعد عن مركزها ٧ سم . رسم من أ مستقيم يقطع الدائرة في جـ ، د بحيث جـ ∈ أد فإذا كان أجـ = ٥ سم أحسب طول الوتر جـد

الحل :- ∵ $ق_م(أ) = (أم)^2 - نق^2$

∴ $ق_م(أ) = ٤٩ - ٩ = ٤٠$

∵ $ق_م(أ) = أجـ \times أد \Leftarrow ٤٠ = ٥ \times أد \Leftarrow أد = \frac{٤٠}{٥} = ٨$ سم

∴ جـد = ٨ - ٥ = ٣ سم #

مثال (٣) :- الدائرة م طول نصف قطرها ٦ سم ، النقطة أ تبعد عن مركزها ١٠ سم . رسم مستقيم يمر بالنقطة أ ويقطع الدائرة في النقطتين جـ ، د حيث أجـ = د جـ

أوجد طول جـ د وبعده عن مركز الدائرة .

الحل : ∵ نق = ٦ سم ، أ م = ١٠ سم

∴ أ تقع خارج الدائرة .

∵ ق$_{م}$(أ) = (أم)^2 - نق^2 = أجـ × أد ⇐ ق$_{م}$(أ) = ١٠٠ - ٣٦ = ٢ د جـ × د جـ

∴ ٦٤ = ٢ (د جـ)^2 ⇐ (د جـ)^2 = $\frac{٦٤}{٢}$ = ٣٢ ⇐ د جـ = $\sqrt{٣٢}$ = ٤$\sqrt{٢}$ سم #

نفرض أن بعد الوتر جـ د عن مركز الدائرة = م هـ حيث م هـ ⊥ جـ د

فيكون هـ منتصف جـ د ⇐ جـ هـ = هـ د = $\frac{٤\sqrt{٢}}{٢}$ = ٢$\sqrt{٢}$ سم

∴ أ هـ = ٤$\sqrt{٢}$ + ٢$\sqrt{٢}$ = ٦$\sqrt{٢}$ سم

في Δ أ هـ م القائم في هـ ⇐ (م هـ)^2 = (أم)^2 - (أ هـ)^2

⇐ (م هـ)^2 = ١٠٠ - ٧٢ = ٢٨ ∴ م هـ = $\sqrt{٢٨}$ = ٢$\sqrt{٧}$ سم #

---

* **تدريب** * الدائرة ن طول نصف قطرها ٨ سم . النقطة ب تبعد عن مركزها ١٢ سم رسم مستقيم يمر بالنقطة ب ويقطع الدائرة في نقطتين جـ ، د حيث جـ ب = جـ د

احسب طول الوتر جـ د وبعده عن النقطة ن .

مثال (٤) :- دائرتان م ، ن متقاطعتان في أ ، ب . جـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، جـ ∉ $\overline{أب}$. رسم $\overrightarrow{جـ د}$ يقطع الدائرة م في د ، هـ حيث جـ د = ٩ سم ، د هـ = ٧ سم ، ورسم $\overrightarrow{جـ و}$ يمس الدائرة ن عند و .

(١) اثبت أن ق$_{م}$(جـ) = ق$_{ن}$(جـ) (٢) إذا كان أب = ١٠ سم احسب طول كل من $\overline{أجـ}$ ، $\overline{جـ و}$

الحل :-

∵ $ق_م(جـ)$ = جـ د × جـ هـ = جـ أ × جـ ب ← (١)

∵ $ق_ن(جـ)$ = $(جـ و)^2$ = جـ أ × جـ ب ← (٢)

من ١ ، ٢ ⇐ $ق_م(جـ) = ق_ن(جـ)$ #

∴ $ق_م(جـ) = ق_ن(جـ)$ = ٩ × ١٦ = ١٤٤

∵ أ ب = ١٠ سم ⇐ $ق_ن(جـ) = (جـ و)^2$ ⇐ ١٤٤ = $(جـ و)^2$ ⇐ جـ و = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم

، $ق_ن(جـ)$ = جـ أ × جـ ب ⇐ ١٤٤ = جـ أ (١٠ + جـ أ)

⇐ ١٤٤ = ١٠ جـ أ + $(جـ أ)^2$ ⇐ $(جـ أ)^2$ + ١٠ (جـ أ) − ١٤٤ = ٠ "بالتحليل"

(جـ أ − ٨)(جـ أ + ١٨) = ٠ ومنها جـ أ = ٨ سم

(ملاحظة هامة) :-

تسمى مجموعة النقاط التي لها نفس القوة بالنسبة لدائرتين مختلفتين بالمحور الأساسي للدائرتين . فإذا كان $ق_م(أ) = ق_ن(أ)$ فإن أ تقع على المحور الأساسي للدائرتين .

من المثال السابق لاحظ أن :- $ق_م(جـ) = ق_ن(جـ)$ ، $ق_م(أ) = ق_ن(أ)$ = صفر ، $ق_م(ب) = ق_ن(ب)$ = صفر " لأن كل من أ ، ب تقعان على محيط الدائرتين "

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ محور أساسي للدائرتين م ، ن .

---

* تدريب * الدائرتان م ، ن متماستان من الخارج في أ ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك للدائرتين م ، ن ، $\overrightarrow{بجـ}$ يقطع الدائرة م في جـ ، د ، $\overrightarrow{بهـ}$ يقطع الدائرة ن في هـ ، و على الترتيب

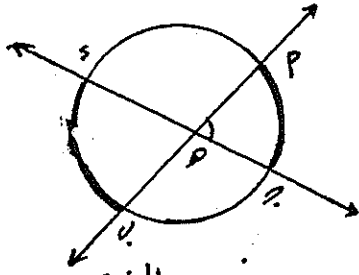
ثانيا: القاطع والمماس وقياسات الزوايا :-

تذكر أنه :-

① إذا تقاطع قاطعان داخل دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف مجموع قياس القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس

في الشكل المقابل :-

$\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جـء} = \{هـ\}$

فإن ق(∠ء أ هـ جـ) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌒أجـ) + ق(⌒ءب)]

② إذا تقاطع قاطعان داخل دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها.

في الشكل المقابل :-

$\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جـء} = \{هـ\}$

فإن ق(∠ء أ هـ جـ) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌒أجـ) - ق(⌒ءب)]

مثال ⑤ :- في الأشكال الآتية . أوجد قيمة س :

(١)

(٢)

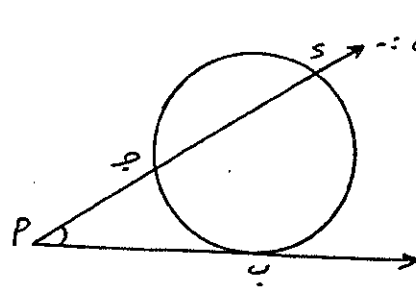
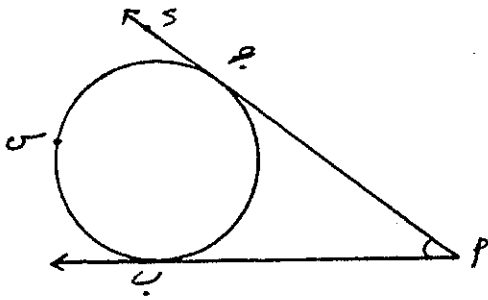
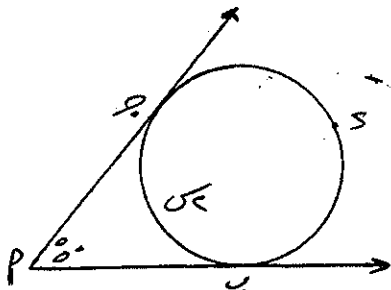
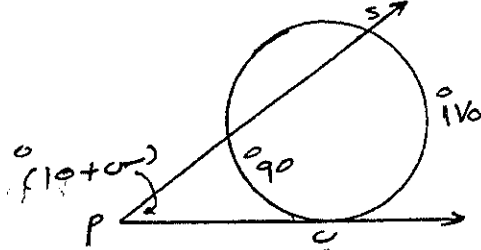
الحل :- (١) س° = $\frac{1}{2}$ [ق(⌒أجـ) + ق(⌒ءب)] = $\frac{1}{2}$ [١١٠° + ٦٠°] = $\frac{1}{2}$ × ١٧٠° = ٨٥°

(٢) س° = $\frac{1}{2}$ [ق(⌒أجـ) - ق(⌒ءب)] = $\frac{1}{2}$ [١٠٠° - ٣٠°] = $\frac{1}{2}$ × ٧٠° = ٣٥°

---

* تدريبات * في كل من الأشكال الآتية . أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس .

تمرين مشهور :-

القاطع والمماس (أو المماسان) لدائرة المتقاطعان خارج الدائرة يكون قياس زاوية تقاطعهما مساوياً نصف الفرق الموجب بين قياس القوسين المقابلين لها.

في الشكل المقابل :-

ق($\hat{أ}$) = $\frac{1}{2}$ [ق(ب د) - ق(ب جـ)]

ق($\hat{أ}$) = $\frac{1}{2}$ [ق(ب س جـ) - ق(ب جـ)]

مثال ⑦ :- في الأشكال الآتية أوجد قيمة س .

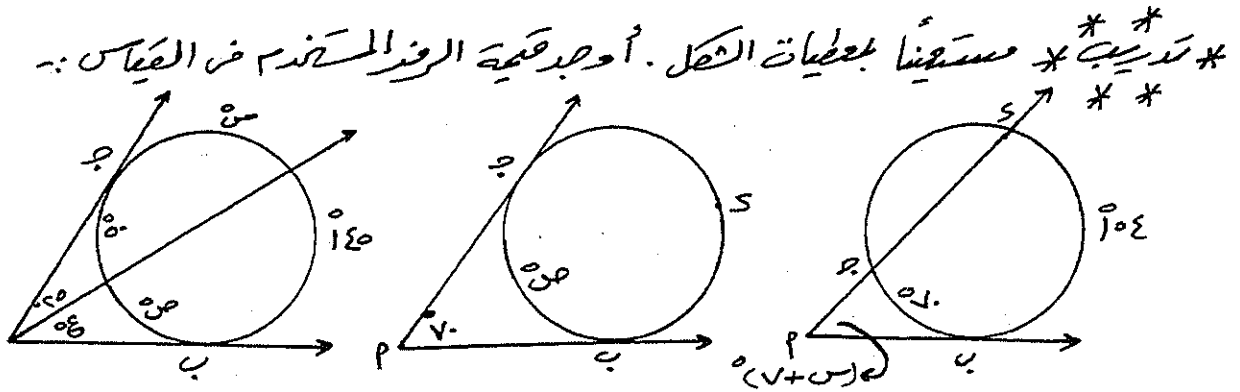
الحل :- (١) (س + ١٥)° = $\frac{1}{2}$ [١٧٥ - ٩٠] = ٤٠° ⟸ س + ١٥ = ٤٠° ⟸ س = ٢٥°

(٢) ٥٠° = $\frac{1}{2}$ [ق(ب د جـ) − ق(ب جـ)] ⇐ ٥٠° = $\frac{1}{2}$ [(٣٦٠° − ٢س) − ٢س]

٥٠° = $\frac{1}{2}$ [٣٦٠ − ٤س] ×٢ ⇐ ١٠٠° = ٣٦٠° − ٤س

٤س = ٣٦٠° − ١٠٠° ⇐ ٤س = ٢٦٠° ⇐(÷٤) س = ٦٥°

تدريب مستعينا بمعطيات الشكل. أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس :-

---

مثال (٥) :- في الشكل المقابل :- دائرة طول نصف قطرها ٩ سم

$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسان لها عند ب ، جـ . $\overline{أم}$ يقطع الدائرة في د

، ب جـ في س . رسم ب د فقطع أجـ في هـ

اذا كان ق(م) = ١٤٤ . أوجد :-

(١) طول $\overline{أب}$ ، (٢) طول أس

الحل :- ∵ ق(أ) = (أب)^2 ⇐ ١٤٤ = (أب)^2 ⇐ أب = $\sqrt{144}$ = ١٢ سم

نصل ب م نصف قطر . ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس ∴ $\overline{أب}$ ⊥ $\overline{بم}$

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسان ∴ $\overline{أم}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

في △ أ ب م القائم في ب ∴ (أم)^2 = (أب)^2 + (ب م)^2 = (١٢)^2 + (٩)^2 = ٢٢٥

∴ أم = $\sqrt{225}$ = ١٥ سم

في △ أ ب م القائم في ب ، ∵ ب س ⊥ أم ∴ (أب)^2 = أس × أم (أقليدس)

⇐ (١٢)^2 = أس × ١٥ ⇐ أس = $\frac{144}{15}$ = ٩٫٦ سم #

تماريـن على "تطبيقات التناسب في الدائرة"

① حدد موقع كل من النقط التالية بالنسبة إلى الدائرة م، والتى طول نصف قطرها ١٠سم ثم احسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة.

(أ) $و_م$ (أ) = −٣٦ (ب) $و_م$ (ب) = ٩٦ (جـ) $و_م$ (جـ) = صفر

....

② أوجد قوة النقطة المعطاة بالنسبة إلى الدائرة م، والتى طول نصف قطرها نق:

(أ) النقطة أ حيث أ م = ١٢سم ، نق = ٩ سم ....
(ب) النقطة ب حيث ب م = ٨ سم، نق = ١٥ سم ....
(جـ) النقطة جـ حيث جـ م = ٧ سم ، نق = ٧ سم ....
(د) النقطة ء حيث ء م = $\sqrt{17}$ سم، نق = ٤ سم ....

③ إذا كان بعد نقطة عن مركز دائرة يساوى ٢٥سم وقوة هذه النقطة بالنسبة إلى الدائرة تساوى ٤٠٠ أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة. ....

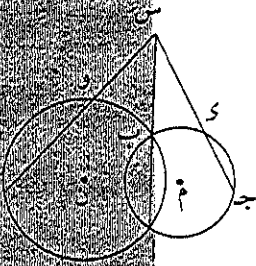
④ الدائرة م طول نصف قطرها ٢٠سم. أ نقطة تبعد عن مركز الدائرة مسافة ١٦سم، رسم الوتر $\overline{ب جـ}$ حيث أ ∈ $\overline{ب جـ}$ ، أ ب = ٢ أ جـ. إحسب طول الوتر $\overline{ب جـ}$.

....

....

⑤ فى الشكل المقابل: الدائرتان م، ن متقاطعتان فى أ، ب

حيث $\overleftrightarrow{أ ب}$ ∩ $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ∩ $\overleftrightarrow{هـ و}$ = {س}، س ء = ٢ ء جـ ، هـ و = ١٠سم، $و_ن$ (س) = ١٤٤.

(أ) أثبت أن $\overleftrightarrow{أ ب}$ محور أساسى للدائرتين م، ن.
(ب) أوجد طول كل من $\overline{س جـ}$، $\overline{س و}$
(جـ) أثبت أن الشكل جـ ء و هـ رباعى دائرى.

....

....

....

⑯ مستعينًا بمعطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس.

(أ)
(ب)
(ج)

....

(د)
(هـ)
(و)

....

(ز)
(ح)
(ط)

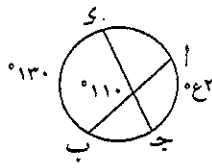
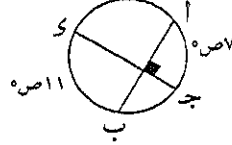
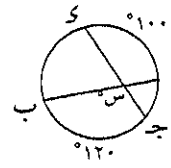
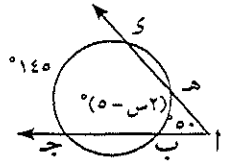
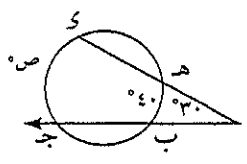
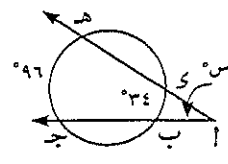
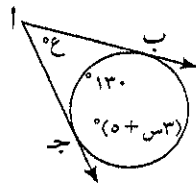
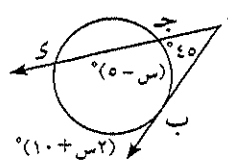
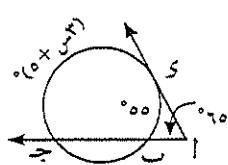
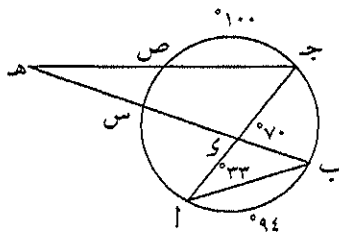
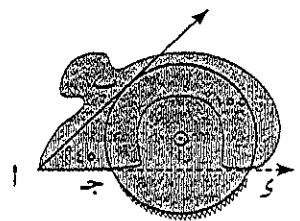
....

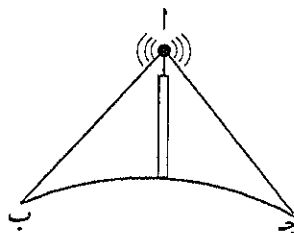
⑦ فى الشكل المقابل: ق(∠ب أ جـ) = ٣٣°، ق(∠ب ى جـ) = ٧٠°، ق($\overset\frown{أب}$) = ٩٤°، ق($\overset\frown{جـ ص}$) = ١٠٠° أوجد قياس كل من:

(أ) $\overset\frown{س ص}$

(ب) $\overset\frown{أ س}$

(ج) ∠ب هـ جـ

....

⑧ للربط مع الصناعة: منشار دائرى لقطع الخشب طول نصف قطر دائرته ١٠سم. يدور داخل حافظة حماية، فإذا كان ق(∠ب أ ى) = ٤٥°، ق($\overset\frown{ب ى}$) = ١٥٥° أوجد طول قوس قرص المنشار خارج حافظة الحماية.

....

⑨ اتصالات: تتبع الإشارات التى تصدر عن برج الاتصالات فى مسارها شعاعًا، نقطة بدايته على قمة البرج، ويكون مماسًا لسطح الأرض، كما فى الشكل المقابل. حدد قياس القوس المحصور بالمماسين بفرض أن البرج يقع على مستوى سطح البحر، ق(∠جـ أ ب) = ٨٠°

تمارين عامة

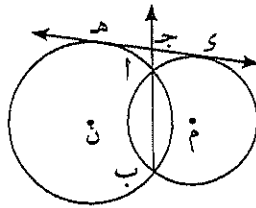
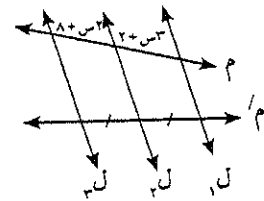
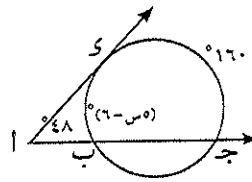
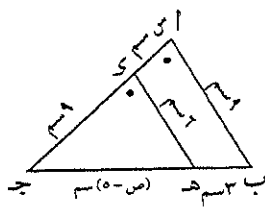
(١) أكمل العبارات التالية:

(أ) المنصفان الداخلى والخارجى لزاوية واحدة ....

(ب) منصفات زوايا المثلث تتقاطع فى ....

(جـ) إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث، ويقطع الضلعين الآخرين فإنه ....

(د) المنصف الخارجى لزاوية رأس المثلث المتساوى الساقين .... قاعدة المثلث.

(هـ) إذا كانت قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م كمية سالبة، فإن نقطة أ تقع ....

(٢) مستعينًا بمعطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس.

(أ)

(ب)

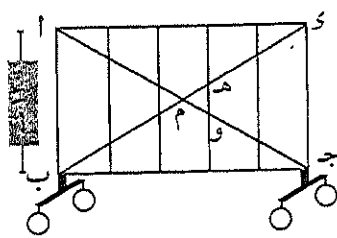
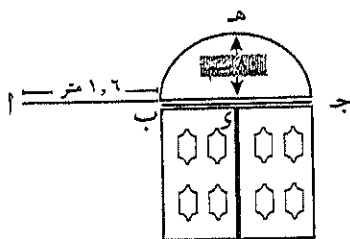
(جـ)

(٣) دائرتان م، ن متقاطعتان فى أ، ب.

$\overleftrightarrow{هـ ى}$ مماس مشترك للدائرتين م، ن عند ى، هـ على الترتيب،

$\overleftrightarrow{ب أ} \cap \overleftrightarrow{ى هـ} = \{جـ\}$

(أ) أثبت أن: $\overleftrightarrow{ب جـ}$ محور أساسى للدائرتين.

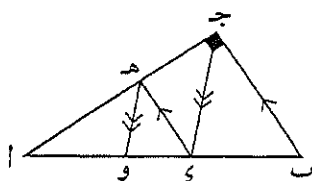
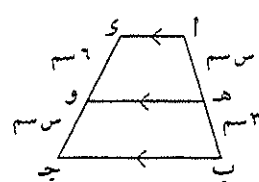
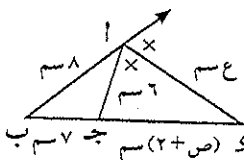
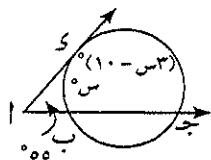
(ب) إذا كان أ ب = ٩سم، ق ن(جـ) = ٣٦، أوجد طول $\overline{جـ أ}$، $\overline{جـ ى}$

(٤) يبين الشكل المقابل أحد الحواجز المرورية أ ب جـ ى على شكل مستطيل ومكون من متوازية ومتطابقة، وعلى أبعاد متساوية، ومثبت به دعامتان $\overline{أ جـ}$، $\overline{ب ى}$، تقطعان أحد القضبان الرأسية فى و، هـ على الترتيب فإذا كان أ ب = ١٢٠سم أوجد طول $\overline{هـ و}$.

(٥) هندسة معمارية: من نقطة أ والتي تبعد ١,٦ مترًا عن قاعدة قنطرة تعلو باب منزل، وجد أن قوة النقطة أ بالنسبة لدائرة قوس القنطرة يساوى ٦,٤ متر مربع.

(أ) أوجد طول قاعدة القنطرة (ب جـ).

(ب) إذا كان ارتفاع القنطرة يساوى ٨٠سم، فأوجد قوة النقطة ى بالنسبة لدائرة القنطرة وطول نصف قطرها.

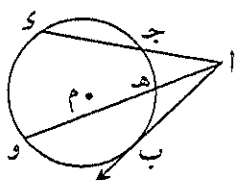
اختبار الوحدة

① مستخدمًا معطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس.

② فى الشكل المقابل: ∠ أ جـ ب قائمة، ب جـ // ى هـ

جـ ى // هـ و. أثبت أن:

أ و × أ ب = (أ هـ)^2 + (هـ ى)^2

③ أ ب جـ مثلث، ن نقطة داخل المثلث. نصفت الزوايا أ ن ب، ب ن جـ، جـ ن أ بمنصفات لاقت أ ب، ب جـ، جـ أ فى ى، هـ، و على الترتيب.

أثبت أن: $\frac{\text{أ ى}}{\text{ى ب}} \times \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} \times \frac{\text{جـ و}}{\text{و أ}} = ١$

④ أ نقطة خارج الدائرة م، أ ب مماس للدائرة عند ب.

رسم أ جـ، أ هـ يقطعان الدائرة فى جـ، ى، هـ، و على الترتيب،

أ جـ = ٤سم، هـ و = ٩سم.

(أ) إذا كان ق~م~(أ) = ٣٦ أوجد طول كل من أ ب، أ هـ، جـ ى

(ب) إذا كانت س ∈ جـ ى حيث جـ س = ٢سم أوجد ق~م~(س)، ق~م~(ى).

⑤ أ ى متوسط فى △أ ب جـ، جـ س ينصف ∠ أ ى ب ويقطع أ ب فى س، ى ص ينصف ∠ أ ى جـ ويقطع أ جـ فى ص.

(أ) أثبت أن: س ص // ب جـ

(ب) إذا رسم ى ع ⊥ س ص ويقطعه فى ع، وكان س ع = ٩سم، ع ص = ١٦سم أوجد طول كل من: ى س، ى ص.

اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

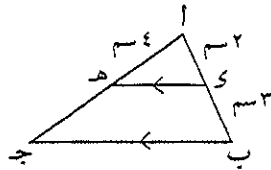
(١) إذا كان $\frac{س}{٦} = \frac{٩}{٢}$ فإن س تساوى:

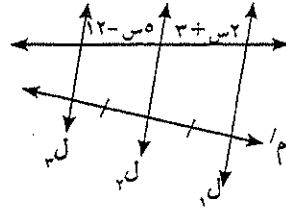
(أ) ١٢ (ب) ١٦ (ج) ٢٧ (د) ٨١

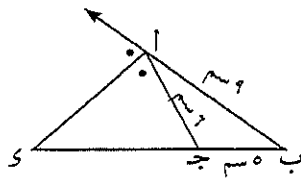
(٢) جذرا المعادلة $س^٢ + س - ٢٠ =$ صفر هما:

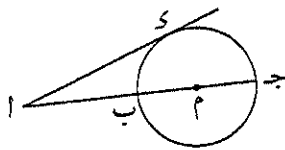
(أ) ٢، -١٠ (ب) ٤، -٥ (ج) ٥، -٤ (د) -٤، ٥

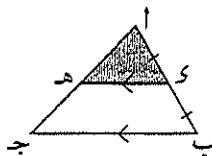
(٣) إذا كان $\overline{ءهـ} // \overline{ب جـ}$ فإن أ جـ يساوى:

(أ) ٣سم (ب) ٤سم
(ج) ٦سم (د) ١٠سم

(٤) إذا كان المستقيمات ل١، ل٢، ل٣ متوازية، يقطعها المستقيمان م، م/ والأطوال مقدرة بالسنتيمترات فإن س تساوى:

(أ) ٥ (ب) ٣
(ج) ٧ (د) ٢

(٥) فى الشكل المقابل $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف الزاوية الخارجة عند أ فإن طول $\overline{جـء}$ يساوى:

(أ) ٥سم (ب) ١٠سم
(ج) ١٢سم (د) ١٨سم

(٦) الدائرة م طول نصف قطرها ٥سم، $\overleftrightarrow{أء}$ مماس للدائرة عند ء، أء = ١٢سم فإن طول $\overline{أجـ}$ يساوى:

(أ) ٧سم (ب) ١٢سم
(ج) ١٥سم (د) ١٨سم

(٧) إذا كانت مساحة سطح △أء هـ = ١٦سم٢
فإن مساحة سطح المثلث أ ب جـ = ... سم٢.

(أ) ١٦ (ب) ٣٢
(ج) ٦٤ (د) ١٢٨

اختبار تراكمي

الأسئلة ذات الإجابات القصيرة:

⑧ فى الشكل المقابل:
أب // جـى ، ب هـ = ٢سم، جـ هـ = ٣سم،
اى = ١٠سم. أوجد طول هـى

⑨ فى الشكل المقابل: ب هـ ينصف ∠ب،
ويقطع اجـ فى هـ ا ب = ٦سم، جـى = ٥سم، ى ا = ٧,٥سم
ب جـ = ٤سم. أثبت أن ى هـ ينصف ∠ ا ى جـ

⑩ فى الشكل المقابل:
أب ، جـى وتران فى الدائرة، أب ∩ جـى = {هـ}
أثبت أن △ا هـ جـ ~ △ى هـ ب

التمارين ذات الإجابات الطويلة

⑪ فى الشكل المقابل: ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ٢ ب جـ = ١٢سم،
ا جـ = ٩سم، ى ∈ ا ب حيث ا ى = ٣سم،
هـ ∈ ا جـ حيث ا هـ = ٤سم.
أثبت أن △ ا ب جـ ~ △ ا هـ ى
ثم أوجد طول هـ ى.

⑫ ا ب جـ مثلث، ى ∈ ب جـ، ى ∉ ب جـ، رسم ى و فقطع ا جـ، ا ب فى هـ، و على الترتيب
فإذا كان الشكل ب جـ هـ و رباعيًا دائريًا أثبت أن $\frac{ب ى}{ى هـ} = \frac{و ب}{جـ هـ}$.

اختبارات عامة

من الكتاب المدرسي علي

الجبر

وحساب المثلثات

والهندسة

اختبارات عامة

الاختبار الأول (الجبر وحساب المثلثات)

أولاً: أكمل ماياتى

(١) إذا كان س = -١ هى أحد جذرى المعادلة $س^٢ - أ س - ٢ = ٠$ فإن أ = ...

(٢) إشارة الدالة د حيث $د(س) = س^٢ + ٣$ تكون ....

(٣) المعادلة التربيعية فى مجموعة الأعداد المركبة التى جذراها – ت، ت هى ....

(٤) مدى الدالة د حيث $د(\theta) = ٣ جا\theta$ هو ....

(٥) أصغر زاوية موجبة مكافئة للزاوية التى قياسها (-٨٤٠°) قياسها .... وتقع فى الربع ....

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(١) (أ) أثبت أن جذرى المعادلة $س^٢ - ٥س + ٣ = ٠$ حقيقيان مختلفان، ثم أوجد مجموعة الحل فى ح مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد. ....

(ب) أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار: جا (-٣٠°) جتا ٤٢٠° + $\frac{ظا ٢٥°}{ظتا ٦٥°}$ ....

(٢) (أ) فى المعادلة $(أ - ٥) س^٢ + (أ - ١٠) س - ٥ = ٠$ أوجد قيمة أ فى الحالات الآتية:

أولًا: إذا كان مجموع جذرى المعادلة = ٤ ....

ثانيًا: إذا كان أحد جذرى المعادلة هو المعكوس الضربى للجذر الآخر. ....

(ب) ابحث إشارة الدالة د حيث $د(س) = س^٢ + ٢ س - ١٥$ مع توضيح ذلك على خط الأعداد.

....

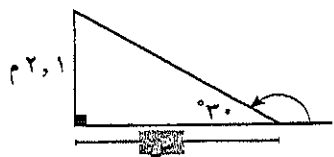
(٣) (أ) أوجد مجموعة حل المتباينة: $٥س^٢ + ١٢س \leqslant ٤٤$ ....

....

(ب) إذا كان جا $\theta = \frac{٣}{٥}$ حيث $٩٠° < \theta < ١٨٠°$، أوجد قيمة: جتا $(٢٧٠° - \theta)$، ظا $(١٨٠° + \theta)$ ....

....

(٤) (أ) ضع العدد المركب الآتى فى أبسط صورة $(٢٦ - ٤ت) - (٩ - ٢٠ ت)$ حيث $ت^٢ = -١$ ....

(ب) الربط بالرياضة: يركل لاعب كرة القدم الكرة نحو الهدف من مسافة س مترا عن حارس المرمى، فيقفز الحارس ويمسك الكرة على ارتفاع ٢,١ مترًا عن سطح الأرض فإذا كان مسار الكرة يميل بزاوية قياسها ٣٠° مع الأفقى. فأوجد لأقرب رقم عشرى واحد المسافة بين اللاعب وحارس المرمى عندما ركل اللاعب الكرة.

٣٠° — ٢,١ م — س

الاختبار الثانى (الجبر وحساب المثلثات)

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① أبسط صورة للعدد التخيلى ت^{٧٣} هو: ....
(أ) −١ (ب) ١ (جـ) −ت (د) ت

② الدالة د: [−٤، ٧] ⟵ ح حيث د(س) = ٦ − ٢س تكون إشارتها موجبة فى الفترة: ....
(أ) [−٤، ٣[(ب)]٣، ٧] (جـ) [−٤، ٧] (د)]٣، ٧[

③ إذا كان جذرا المعادلة ٤ س^٢ − ١٢ س + جـ = ٠ متساويين فإن جـ تساوى: ....
(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١٦

④ ظا$\left(-\frac{\pi}{٦}\right)$ تساوى: ....
(أ) $-\sqrt{٣}$ (ب) $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) $\sqrt{٣}$

⑤ القياس الدائرى لزاوية مركزية تحصر قوسًا طوله ٣سم من دائرة طول قطرها ٤سم هو: ....
(أ) $(\frac{٢}{٣})$ء (ب) $(\frac{٣}{٢})$ء (جـ) ٥ء (د) ٦ء

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

① (أ) بين نوع جذرى المعادلة س^٢ + ٩ = ٦ س، ثم أوجد مجموعة الحل. ....
(ب) إذا كان: ٧ قتا أ = ٢٥ حيث $\frac{\pi}{٢}$ < أ < π. فأوجد القيمة العددية للمقدار: ظا (π + أ) − ظتا (أ − $\frac{\pi}{٢}$)
....

② (أ) أوجد قيمتى أ، ب الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة: (أ + ٣) − (ب − ١) ت = ٧ − ٩ ت حيث ت^٢ = −١
....
(ب) حول قياس كل من الزوايا المكتوبة بالدرجات إلى راديان والمكتوبة بالراديان إلى درجات
أولًا: ٢١٥° .... ثانيًا: $\frac{٨\pi}{٦}$ ....

③ (أ) ابحث إشارة الدالة د حيث د(س) = ٢س^٢ − ٣ س + ٤ مع توضيح ذلك على خط الأعداد الحقيقية
(ب) إذا كانت الزاوية θ مرسومة فى الوضع القياسىّ، حيث يمر ضلعها النهائى بالنقطة (٤، −٣)
فأوجد جاθ، ظتاθ. ....

④ (أ) إذا كان (س + ٢)^٢ + (س + ١) (س − ٤) < ٠.
أولًا: اكتب المتباينة التربيعية فى أبسط صورة. ثانيًا: أوجد مجموعة حل المتباينة.
....
(ب) إذا كان $\frac{٢}{ل}$، $\frac{٢}{م}$ هما جذرا المعادلة س^٢ − ٦ س + ٤ = ٠ فأوجد المعادلة التى جذراها (ل + م)، ل م.

الاختبار الثالث (الجبر وحساب المثلثات)

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) إذا كان أحد جذرى المعادلة أس^٢ + ٢ س + ٥ = ٠ معكوسًا ضربيًّا للجذر الآخر فإن أ تساوى: ....

(أ) −٥ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٥

(٢) إشارة الدالة د حيث د(س) = ٦ − ٢ س تكون موجبة إذا كانت: ....

(أ) س > ٣ (ب) س ⩽ ٣ (جـ) س < ٣ (د) س ⩾ ٣

(٣) المعادلة التربيعية التى جذراها ١ + ت ، ١ − ت حيث ت^٢ = −١ هى: ....

(أ) س^٢ + ٢س + ٢ = ٠ (ب) س^٢ − ٢س + ٢ = ٠ (جـ) س^٢ + ٢س − ٢ = ٠ (د) س^٢ − ٢س − ٢ = ٠

(٤) إذا كانت θ زاوية مرسومة فى الوضع القياسى بحيث جتا θ > ٠، فى أى ربع يقع ضلع النهاية للزاوية θ:

(أ) الأول (ب) الأول أو الثانى (جـ) الأول أو الثالث (د) الأول أو الرابع

(٥) إذا كانت ٢ جتا أ = −$\sqrt{٣}$ فإن أقل زاوية موجبة تحقق هذه الدالة المثلثية هى: ....

(أ) ٤٥° (ب) ١٣٥° (جـ) ٢٢٥° (د) ٣١٥°

ثانيا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(١) (أ) إذا كان ل، م جذرى المعادلة س (٢ س + ٣) = ٥ فأوجد المعادلة التى جذراها ل + ١ ، م + ١. ....

....

(ب) زاوية مركزية قياسها ٦٠° وتقابل قوسًا طوله $\frac{٧\pi}{٣}$ سم، احسب طول نصف قطر دائرتها. ....

....

(٢) (أ) ضع العدد $\frac{٢ - ٣ت}{٣ + ٢ت}$ فى صورة عدد مركب. حيث ت^٢ = −١. ....

(ب) إذا كان ٤ جا أ − ٣ = ٠ أوجد ق (∠أ) حيث أ ∈] ٠، $\frac{ط}{٢}$ [..........

(٣) (أ) إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د(س) = −س^٢ + ٨ س − ١٥

أولًا: ارسم منحنى الدالة فى الفترة [١، ٧] ثانيًا: عين من الرسم إشارة هذه الدالة.

....

(ب) إذا كان س = ٣ + ٢ت، ص = $\frac{٤ - ٢ت}{١ - ت}$ فأوجد س + ص فى صورة عدد مركب. ....

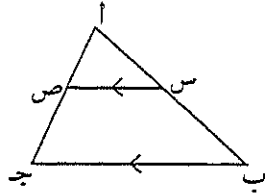
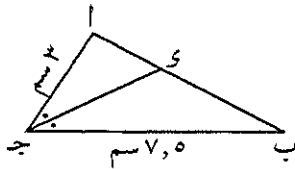
(٤) (أ) أوجد مجموعة حل المتباينة س^٢ + ٣س − ٤ ⩽ ٠ ....

(ب) إذا كان ظا ب = $\frac{٣}{٤}$ حيث ١٨٠° < ب < ٢٧٠° فأوجد قيمة: جتا (٣٦٠° − ب) − جتا (٩٠° − ب)

الاختبار الرابع **(الهندسة)**

أولاً: أكمل

① إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية، فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون ....

② النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين هي ٣ : ٥، إذا كانت مساحة سطح المثلث الأول ٣٦ سم² فإن مساحة سطح المثلث الثاني تساوي ....

③ في الشكل المقابل: إذا كان $\overline{سص}$ // $\overline{ب جـ}$، س ص : ب جـ = ٣ : ٨ فإن:

(أ) اس : س ب = ... : ....

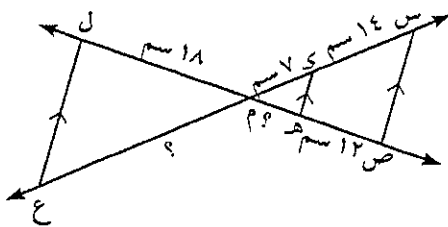
(ب) محيط △اس ص : محيط △اب جـ = ... : ....

④ في الشكل المقابل: إذا كان $\overrightarrow{جـ ى}$ ينصف (∠جـ)،

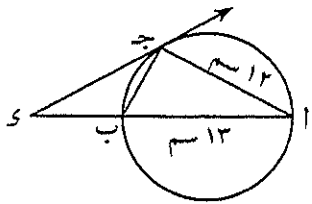
ا جـ = ٣ سم، ب جـ = ٧,٥ سم، فإن ا ى : ب ى = ...

ثانيا: أجب عن الأسئلة الآتية

① (أ) أوجد قوة النقطة ا بالنسبة إلى الدائرة م التي طول نصف قطرها ٣ سم ، ام = ٤ سم.

(ب) رسم مهندس معماري مخططًا لقطعة أرض مستطيلة الشكل، طولها ضعف عرضها، ومساحتها ٢٠٠ متر² بمقياس رسم ١ : ٢٠٠، أوجد طول قطعة الأرض في المخطط.

② في الشكل المقابل: $\overline{سص}$ // $\overline{ى هـ}$ // $\overline{ل ع}$ أوجد:

أولًا: طول $\overline{هـ م}$

ثانيًا: طول $\overline{م ع}$

③ في الشكل المقابل: $\overline{اب}$ قطر في الدائرة،

$\overline{جـ ى}$ مماس للدائرة عند جـ ، اجـ = ١٢ سم، اب = ١٣ سم. أثبت أن:

(أ) △ ى جـ ب ~ △ ى ا جـ

(ب) أوجد طول $\overline{جـ ى}$ لأقرب سم

(جـ) أوجد مساحة △ اب جـ

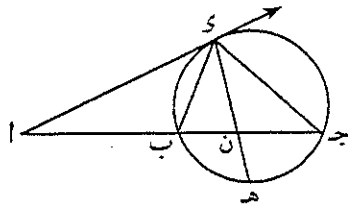
④ اب جـ مثلث قائم الزاوية في ا، فيه اب = ٢٠ سم، اجـ = ١٥ سم، ى ∈ $\overline{ب جـ}$ بحيث كان ب ى = ١٠ سم، رسم $\overline{اهـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ويقطع $\overline{ب جـ}$ في هـ ، ومن ى رسم $\overline{ى و}$ // $\overline{ب ا}$ ويقطع $\overline{اهـ}$ في و.

أثبت أن $\overrightarrow{جـ و}$ ينصف ∠جـ.

الاختبار الخامس (الهندسة)

أولاً: أكمل:

(١) النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين كالنسبة بين ....

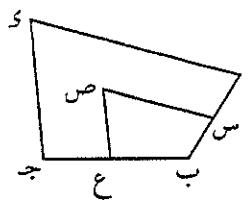
(٢) يتشابه المضلعان إذا كان ....، ....

(٣) فى الشكل المقابل أكمل:

(أ) $(ا ى)^2$ = ...

(ب) ى ن × ن هـ = ...

(جـ) △ ا ى جـ ~ △ ....

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

(١) (أ) أوجد قوة النقطة ب بالنسبة إلى الدائرة م، التى طول نصف قطرها ٨ سم، ب م = ٥ سم

(ب) فى الشكل المقابل:

أولاً: إذا كان المضلع ا ب جـ ى ~ المضلع س ب ع ص

فاثبت أن: $\overline{س ص} // \overline{ا ى}$.

ثانيًا: إذا كان محيط المضلع ا ب جـ ى = ١٤ سم،

محيط المضلع س ب ع ص = ١٠ سم،

طول $\overline{س ب}$ = ٢ سم، فأوجد طول $\overline{ا ب}$

(٢) فى الشكل المقابل: ا ب = ٦ سم، ب جـ = ١٢ سم،

جـ ا = ٨ سم، وجـ = ٣ سم ، ى ب = ٤,٥ سم ، ى و = ٦ سم.

أثبت أن:

(أ) △ ا ب جـ ~ △ ى ب و

(ب) △ هـ و جـ متساوى الساقين.

(٣) س ص ع مثلث، نصفت زاوية ص بمنصف قطع $\overline{س ع}$ فى م، ثم رسم $\overline{ن م}$ // $\overline{ص ع}$ فقطع $\overline{س ص}$ فى ن.

أثبت أن: $\frac{س ص}{ص ع} = \frac{س ن}{ص ن}$، وإذا كان س ص = ٦ سم ، ص ع = ٤ سم، فأوجد طول $\overline{س ن}$.

(٤) ا ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ا. رسم $\overline{ا ى}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ فقطعها فى ى.

رسم المثلثان المتساويا الأضلاع ا ب هـ ، جـ ا و خارج المثلث ا ب جـ

أثبت أن:

(أ) الشكل الرباعى ا ى ب هـ ~ الشكل الرباعى جـ ى ا و.

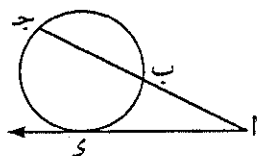
(ب) $\frac{\text{مساحة سطح الشكل ا ى ب هـ}}{\text{مساحة سطح الشكل جـ ى ا و}} = \frac{ب ى}{جـ ى}$

الاختبار السادس (الهندسة)

أولًا: أكمل:

(١) (أ) إذا رُسم مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث، و يقطع الضلعين الآخرين فإنه ....

(ب) فى الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{اى}$ مماس للدائرة عند ى، فإن:

أولًا: ا جـ × ا ب = ...

ثانيًا: إذا كان ا جـ = ٨ سم، ا ب = ٢سم، فإن ا ى = ...

ثالثًا: إذا كان ا ب = ب جـ ، ا ى = ٣ $\sqrt{٢}$ سم فإن، ا جـ = ...

ثانيا: أجب عن الأسئلة الآتية:

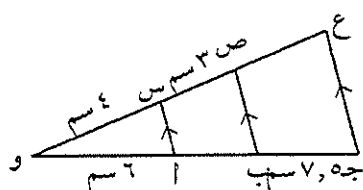
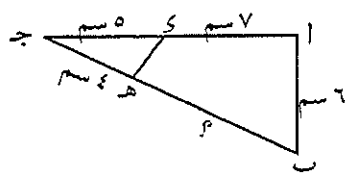
(١) (أ) إذا كانت النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين تساوى ١٦ : ٤٩، فما النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما؟ وما النسبة بين محيطيهما؟

(ب) دائرتان متقاطعتان فى ا، ب رسم مماس مشترك يمسانهما فى س، ص.

إذا كان $\overleftrightarrow{اب}$ ∩ $\overleftrightarrow{س ص}$ = {جـ} اثبت أن جـ منتصف $\overline{س ص}$.

(٢) (أ) فى الشكل المقابل: $\overline{ا س}$ // $\overline{ب ص}$ // $\overline{جـ ع}$ ،

و ا = ٦ سم ، و س = ٤ سم ، س ص = ٣ سم،

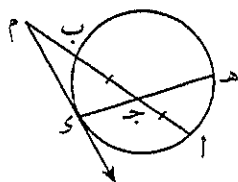
ب جـ = ٧,٥ سم. أوجد طول كل من $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ع ص}$

(ب) فى الشكل المقابل:

△ جـ ى هـ ~ △ جـ ب ا

باستخدام الأطوال الموضحة على الرسم

أوجد طول كل من $\overline{ب هـ}$ ، $\overline{ى هـ}$.

(٣) (أ) أوجد قوة النقطة جـ بالنسبة إلى الدائرة م التى طول نصف قطرها ٦ سم، جـ م = ٦ سم

(ب) فى الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{ا ب}$ ∩ $\overleftrightarrow{ى هـ}$ = {جـ}،

جـ ا = جـ ب ، جـ ى = ٢سم ، جـ هـ = ٨ سم،

$\overline{م ى}$ مماسة للدائرة. م ب = $\frac{١}{٢}$ ا ب. أوجد طول $\overline{م ى}$.

(٤) فى الشكل المقابل: اب جـ مثلث، فيه س ∈ $\overline{ا ب}$ بحيث كان ا س = ٤ سم، س ب = ٦ سم، ص ∈ $\overline{ا جـ}$ بحيث كان ا ص = ٥ سم، ص جـ = ٣ سم.

(أ) أثبت أن: △ ا س ص ~ △ ا جـ ب

(ب) الشكل س ب جـ ص رباعى دائرى.

(جـ) إذا كانت مـ(△ ا س ص) = ٨ سم². أوجد مساحة سطح المضلع س ب جـ ص.